

Capítulo 9. REDUCCIÓN DE TAMAÑO. MOLINOS

9.1. Introducción

Las operaciones unitarias que reducen el tamaño de partículas son procesos industriales muy importantes, en efecto se aplican para: rocas, carbón, cemento, plásticos, granos, etc. Los equipos que se usan para disminuir el tamaño de partículas se denominan en general molinos. Se puede procesar desde pocos kilogramos por hora (operaciones de baja escala) hasta cientos de toneladas por hora (e.g. en la industria minera). En muchas ocasiones el material debe molerse desde aglomerados de gran tamaño hasta polvo muy fino. Probablemente un solo molino no sea capaz de lograr la reducción deseada, entonces será necesaria una secuencia de equipos para lograr el objetivo.

Los equipos que muelen grandes aglomerados se denominan “*crushers*” en inglés, mientras que los que muelen partículas de pequeños tamaños se denominan “*mills*”, por supuesto que existe todo un rango de tamaños donde se superpone la aplicabilidad de estos equipos. En castellano no tenemos tal diferenciación, y habitualmente los equipos son denominados “molinos”.

En muchas industrias de alimentos, la reducción de tamaño puede ayudar a procesos de extracción de alimentos, a disminuir los tiempos de cocción, etc. En la industria de alimentos los equipos para la molienda suelen recibir diferentes nombres según la aplicación, por ejemplo molienda de granos, picado de carne, cubeteado de tubérculos, rayadores, etc.

Los “*crushers*” tienen un costo de capital y de consumo de energía por TPH que nos es elevado. Sin embargo, estos equipos requieren de una gran robustez mecánica ya que se utilizan grandes tensiones para romper aglomerados de gran tamaño (por ejemplo, rocas).

Los “*mills*” consumen mucha energía y sufren desgaste mecánico importante por la erosión que causan las partículas más pequeñas.

Los molinos, al igual que los granuladores, tienen una gran semejanza a los reactores químicos de los procesos gas-líquido, es decir, la distribución de tamaño de partículas de la corriente de salida es completamente diferente a la de entrada (en un reactor, la composición de la mezcla que abandona al equipo posee una composición diferente a la de entrada).

9.2. Equipos para molienda

En la Tabla 9.1 se presenta una clasificación de equipos de molienda en función del tamaño del material requerido. No se incluyen en ese cuadro los equipos de corte en tamaño específico como serían las picadoras, rayadores o cubeteadoras.

En la Figura 9.1 se presenta un molino de rodillo de gruesos (crusher). En este tipo de molinos dos cilindros de acero rotan en sentido contrario de manera que las partículas son atrapadas y sometidas a fuerzas de compresión que causan la reducción de tamaño. Puede definirse la distancia entre ambos rodillos, manipulando el resorte de alivio del equipo. La superficie de los rodillos puede ser lisa, corrugada o puede tener dientes (disco dentado). Los molinos dentados no pueden moler sólidos muy duros. Los molinos de gruesos a rodillos no poseen un tiempo de residencia característico, se denominan equipos de un solo paso.

Tabla 9.1. Tipos de molinos de acuerdo al tamaño del producto final.

Rango de reducción de tamaño	Nombre genérico del equipo	Tipo de equipo
Grueso e intermedio	Molinos de gruesos: “Crushers”	De rodillos
Intermedio y fino	Molinos de finos: “Mills o Grinders”	<ul style="list-style-type: none"> ▪ De martillo ▪ Disco de atrición ▪ De rodillos
Fino y ultrafino	Molinos de ultrafinos: “Ultrafine grinders”	<ul style="list-style-type: none"> ▪ De martillo ▪ De bolas

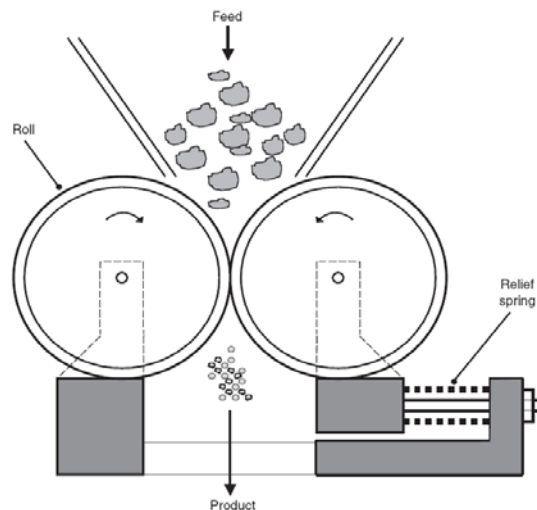


Figura 9.1. Molinos de gruesos a rodillos. Fuente: Ortega-Rivas, 2005.

La Figura 9.2 presenta un molino de martillo, el cual contiene un rotor de alta velocidad que gira dentro de una carcasa cilíndrica. El rotor posee un collar con un dado número de martillos en la periferia. La ruptura se da principalmente por fuerzas de impacto, algo de atrición es factible. Si se reemplazan los martillos por cuchillas, se puede moler material fibroso, y aún pegajoso.

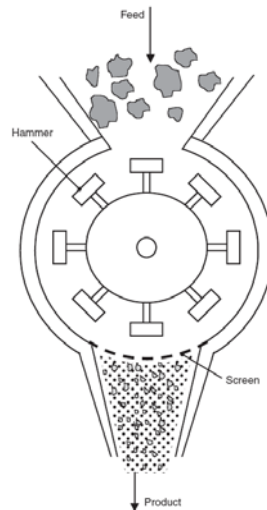


Figura 9.2. Molinos de martillos. Fuente: Ortega-Rivas, 2005.

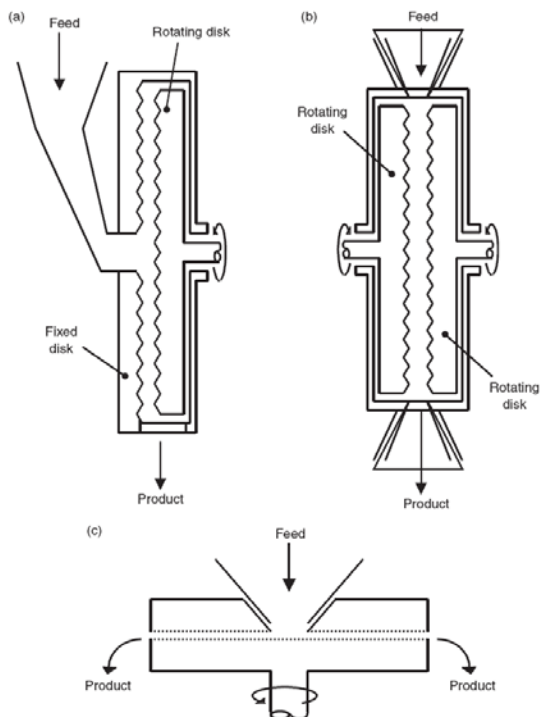


Figura 9.3. Molinos de atrición de discos. a) molino de un disco, b) molino de dos discos, c) molino tipo Buhr. Fuente: Ortega-Rivas, 2005.

Los molinos de disco de atrición se muestran en la Figura 9.3. Se utilizan fuerzas de corte para lograr la reducción de tamaño, se utilizan para dar principalmente partículas finas. Existen varios modelos, la Figura 9.3.a muestra a un disco con canaletas que rota a alta velocidad enfrenteado a un disco fijo. El espaciado entre ambos discos puede regularse. En un molino de atrición de doble disco (Figura 9.3.b) existen dos discos que rotan en direcciones opuestas, lo que facilita un intenso desgaste. Por último el molino tipo Buhr (Figura 9.3.c) es el molino de disco más antiguo, muy usado para la molienda de harina, consiste en dos discos montados en un eje vertical, el de arriba se encuentra fijo, mientras que el de abajo rota.

Los molinos de tambor son usados en muchas industrias para lograr una molienda fina. Básicamente poseen un tambor cilíndrico horizontal que rota a baja velocidad, parcialmente lleno de bolas o de barras (Figura 9.4.a). La carcasa cilíndrica es usualmente de acero recubierta de una lámina de acero al carbono, porcelana o goma. Las bolas son de acero o de piedra. Tanto el material a moler como las bolas o barras del equipo son levantadas en las paredes del tambor (debido a la rotación), las que caen nuevamente en el lecho. La rotación y el impacto del material al caer favorecen la molienda. Se pueden poner baffles en el tambor, dividiendo el equipo en compartimientos donde se cargan bolas de diferentes tamaños (Figura 9.4.b). Esta disposición permite entregar más energía en las zonas donde hay partículas de mayor tamaño. El tambor cónico (Figura 9.4.c) utiliza la segregación del material de una manera eficiente. Al girar el tambor las bolas más grandes se mueven hacia el punto de mayor diámetro (donde ingresan las partículas a moler de mayor tamaño), mientras que las más pequeñas se trasladan hacia la salida del equipo.

La Tabla 9.2 resume las aplicaciones de diferentes molinos en la industria de alimentos.

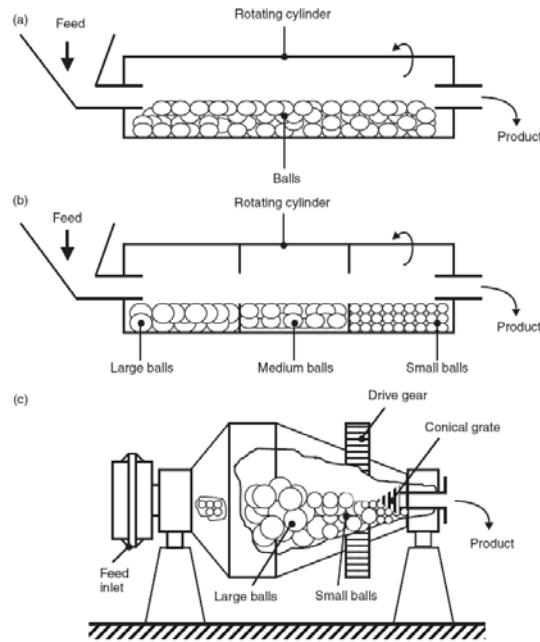


Figura 9.4. Molinos de tambor. a) de flujo rebasante, b) molino compartimentado, c) molino cónico. Fuente: Ortega-Rivas, 2005.

Tabla 9.2. Aplicaciones de molinos.

	Molinos de gruesos a rodillos	Molinos de martillo	Molinos de atrición	Molinos de tambor
<i>Tamaño de molienda</i>				
Gruesos	●			
Intermedios	●	●	●	●
Finos/ultrafinos		●	●	●
<i>Aplicaciones</i>				
Chocolate	●			●
Cacao			●	●
Maíz (húmedo)			●	
Frutas secas		●		
Vegetales secos		●		
Granos	●		●	
Pimienta		●	●	
Sal		●		●
Especias		●		
Azúcar		●		●

9.3. Consumo de energía

Se reconoce la existencia de dos etapas en la rotura tanto de materiales muy duros como frágiles:

- 1) fractura a lo largo de fisuras existentes en el material, y
- 2) formación de nuevas fisuras con posterior fractura.

También se conoce que sólo un pequeño porcentaje de la energía suministrada al equipo es usada para la operación de rotura. Se han reportado eficiencias menores al 2%, lo cual indica que el proceso es extremadamente ineficiente. Gran parte de la energía suministrada se libera como calor, lo cual debe considerarse especialmente si se procesan alimentos.

Estudios teóricos indican que la energía suministrada por unidad de masa procesada para producir un pequeño cambio en tamaño puede expresarse como una función del tipo ley de la potencia con respecto al tamaño de las partículas:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{K}{x^n} \quad (9.1)$$

donde K es una constante del material, y x es el tamaño de la partícula (diámetro). La expresión (9.1) se conoce como la ley general de la ruptura, y es una interpretación general de varias leyes presentadas por diferentes autores.

Rittinger en **1867** consideró que cuando se muele material, la energía requerida debería guardar una relación con la nueva superficie generada durante la molienda. A continuación se presenta la deducción.

$$\text{Masa inicial:} \quad m_1 = N_1 \rho_p k_v x_1^3 \quad (9.2)$$

$$\text{Masa final:} \quad m_2 = N_2 \rho_p k_v x_2^3 \quad (9.3)$$

donde k_v es un factor de forma de volumen (por ejemplo si la partícula es esférica, $k_v=\pi/6$), N_1 y N_2 representan el número de partículas antes y después de la molienda respectivamente.

Como las masas iniciales y finales del material a moler y molido deben ser iguales, puede deducirse la siguiente relación entre N_1 y N_2 :

$$N_2 = N_1 \frac{x_1^3}{x_2^3} \quad (9.4)$$

La nueva superficie generada durante la ruptura puede calcularse a partir de las superficies inicial y final:

$$\text{Área inicial:} \quad S_1 = N_1 k_s x_1^2 \quad (9.5)$$

$$\text{Área final:} \quad S_2 = N_2 k_s x_2^2 \quad (9.6)$$

donde k_s es un factor de forma de superficie (por ejemplo si la partícula es esférica, $k_s=\pi$).

$$\text{Área generada:} \quad S = N_2 k_s x_2^2 - N_1 k_s x_1^2 \quad (9.7)$$

Reemplazando la ecuación (9.4) en (9.7) resulta:

$$\text{Energía consumida: } E' = \frac{m_1}{k_v \rho_p} k_s \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \quad (9.8)$$

$$\text{Energía consumida por unidad de masa molida: } E = \frac{E'}{m_1} = \frac{k_s}{k_v \rho_p} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = C_R \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \quad (9.9)$$

RITTINGER

Por esta razón en la Ley general de ruptura, la expresión de **Rittinger** puede expresarse como (uso de una potencia de n=2 en la ecuación 9.1):

$$\text{RITTINGER} \quad \frac{dE}{dx} = -\frac{K}{x^2} \quad (9.10)$$

Cuando la población no es monodispersa, en la expresión de Rittinger debería utilizarse los diámetros medios en superficie (x_{NS}).

En la práctica se requiere una energía mucho mayor a la requerida para crear una nueva superficie, por esta razón la ecuación de Rittinger es una buena aproximación cuando se genera una alta superficie, es decir cuando se realiza una molienda muy fina del material.

Kick en 1885 propuso que la energía requerida para moler un material debía ser proporcional a la reducción de tamaño, respecto al inicial:

$$\text{Tamaño inicial: } x_1 \quad (9.11)$$

$$\text{Tamaño final: } x_2 = x_1 - \Delta x \quad (9.12)$$

En otras palabras, la energía es proporcional a:

$$\Delta E \propto \frac{\Delta x}{x} \quad (9.13)$$

Aplicando el límite para Δx tendiendo a 0, conduce a la ecuación de Kick (potencia 1 en la Ley general de rotura):

$$\text{KICK} \quad \frac{dE}{dx} = -\frac{K}{x} \quad (9.14)$$

Integrando la ecuación (9.14) resulta:

$$\text{KICK} \quad E = K \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \quad (9.15)$$

La ecuación indica que debería usarse igual energía para moler una partícula de 10 μm a 1 μm , que una roca de 1 m a bloques de 10 cm. Obviamente esto no es posible, la ecuación de Kick es razonable cuando se procesan materiales gruesos.

La ley más usada es la Ley de **Bond** (1952), la cual se expresa como sigue:

$$\text{BOND} \quad E = W_i \left(\frac{10}{\sqrt{x_2}} - \frac{10}{\sqrt{x_1}} \right) \quad (9.16)$$

En esta ecuación x_1 y x_2 representan el tamaño del tamiz (expresado en micrones) por el cual el 80% del material (de la alimentación y del producto) pasa. W_i se denomina índice de trabajo de Bond ("*Bond work index*"). Este parámetro representa la energía requerida, por unidad de masa, para moler un material de tamaño infinito a un tamaño de 100 micrones.

En términos de la ley general de la ruptura, la ecuación de Bond puede expresarse como:

$$\text{BOND} \quad \frac{dE}{dx} = -\frac{K}{x^{1.5}} \quad (9.17)$$

La ecuación de Bond permite representar la molienda razonablemente para materiales gruesos y finos.

Las ecuaciones presentadas permiten caracterizar la molienda de manera global, y son herramientas útiles para una primera caracterización del proceso de ruptura. De cualquier manera, si se desea conocer la PSD del producto de la molienda, nuevamente el balance de población es la única herramienta que puede proveer tal información.

Ejemplo

Para moler partículas de 25 mm se requieren 20 KJ/Kg. Si la constante de la ecuación de Kick es 15.7 KJ/Kg. Estime el tamaño de las partículas molidas.

Solución

$$E = K \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

$$\begin{array}{lll} E = & 20 & \text{KJ/Kg} \\ x_1 = & 25 & \text{mm} \\ K = & 15.7 & \text{KJ/Kg} \end{array}$$

$$x_2 = \frac{x_1}{\exp\left(\frac{E}{K}\right)}$$

$$x_2 = 7 \text{ mm}$$

9.4. Cinética de Ruptura

El proceso de molienda, tal como lo muestra la Figura 9.5, puede de causar que una partícula de un dado tamaño genere más de dos fragmentos.

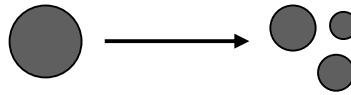


Figura 9.5. Proceso de ruptura.

Los términos de nacimiento y muerte de una partícula de tamaño v pueden expresarse como:

Nacimiento de partículas de tamaño v :

$$\begin{array}{c} \text{Círculo } u \longrightarrow \text{Círculos } v \end{array} \quad \dot{n}_{\text{birth/rupt}}(v) = \int_v^{\infty} b(u,v) S(u) n(u) du \quad (9.18)$$

donde $S(u)$ es la constante de velocidad de ruptura (s^{-1}). $b(u,v)$ representa la función de distribución de ruptura, indicando la fracción de partículas de tamaño v que se generan por ruptura de partículas de tamaño u ($\#_v/\#_u L^3$). Sólo las partículas de tamaño mayores a v pueden dar por ruptura fragmentos de tamaño v , esta es la razón por la cual la integral se extiende desde v hasta las partículas de mayor tamaño existentes en la grilla.

Muerte de partículas de tamaño v :

$$\begin{array}{c} \text{Círculo } v \longrightarrow \text{Círculos } v \end{array} \quad \dot{n}_{\text{death/rupt}}(v) = S(v) n(v) \quad (9.19)$$

9.4.1. Función de distribución de ruptura. Propiedades.

9.4.1.1. Conservación del volumen

La función de distribución de ruptura $[b(u,v)]$, si la masa del sistema no se modifica en el proceso (i.e. hay sólo ruptura), debe verificar la siguiente ecuación:

$$u = \int_0^u v b(u,v) dv \quad (9.20)$$

donde u y v representan el volumen de dos partículas cualesquiera del sistema.

La ecuación (9.20) indica que la suma de los volúmenes generados por fractura de la partícula u debe ser igual al volumen original de tal partícula (conservación de la masa).

9.4.1.2. Número promedio de fragmentos generados

El número de fragmentos que se genera se calcula como sigue:

$$N_u = \int_0^u b(u,v) dv \quad (9.21)$$

donde N_u ($\#_u$) es el número de fragmentos generados a partir de una partícula de tamaño u .

9.5. Balance de Población Macroscópico

Si aplicamos la ecuación (8.18) a un granulador discontinuo perfectamente mezclado, donde sólo se lleven a cabo procesos de ruptura, puede obtenerse la siguiente ecuación:

$$-\frac{dm_j}{dt} + \overline{\dot{n}_{\text{birth } j}} - \overline{\dot{n}_{\text{death } j}} = 0 \quad (8.39)$$

Teniendo en cuenta la definición de momento (ecuación 8.1) y las velocidades de nacimiento y muerte (9.18) y (9.19) para ruptura, la ecuación (8.39) puede reescribirse como:

$$-\frac{dm_j}{dt} + \int_0^\infty v^j dv \int_v^\infty b(u,v) S(u) n(u) du - \int_0^\infty v^j S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.22)$$

Si calculamos el **momento 1** (o V_T) debemos hacer $j=1$ en la ecuación (9.22), por lo tanto:

$$-\frac{dm_1}{dt} + \int_0^\infty v dv \int_v^\infty b(u,v) S(u) n(u) du - \int_0^\infty v S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.23)$$

Tal como hicimos para el caso de aglomeración podemos hacer un cambio de extremos de las integrales dobles de la ecuación (9.23). Teniendo en cuenta que $0 < v < \infty$ y $v < u < \infty$; pueden ser reescritos como $0 < u < \infty$ y $0 < v < u$. La ecuación (9.23) puede entonces expresarse como:

$$-\frac{dm_1}{dt} + \int_0^\infty S(u) n(u) du \int_0^u b(u,v) v dv - \int_0^\infty v S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.24)$$

Reemplazando la ecuación (9.20) en la ecuación (9.24):

$$-\frac{dm_1}{dt} + \int_0^\infty u S(u) n(u) du - \int_0^\infty v S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.25)$$

Por lo tanto se verifica:

<p>!!!!</p> <p>Molino discontinuo, perfectamente mezclado, ruptura pura</p>	$\frac{dm_1}{dt} = 0 \quad (9.26)$
---	------------------------------------

Si calculamos el **momento 0** (o N_T) debemos hacer $j=0$ en la ecuación (9.22), por lo tanto:

$$-\frac{dm_0}{dt} + \int_0^\infty dv \int_v^\infty b(u,v) S(u) n(u) du - \int_0^\infty S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.27)$$

El momento 0 no puede calcularse de modo genérico si no se definen las funcionalidades de la constante de velocidad de ruptura y de la función de distribución de ruptura. Haremos dos suposiciones:

- $S(v) = \text{constante} = S_0$
- Se producen rupturas binarias, i.e. una partícula se fractura para dar sólo dos fragmentos (ver Figura 9.6).

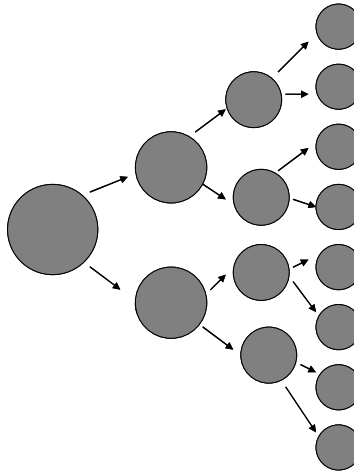


Figura 9.6. Ruptura binaria.

La función de distribución de ruptura es la función que tiene en cuenta si la ruptura es binaria o múltiple. Para el caso de ruptura binaria, deber verificarse que:

$$b(u,v) = \frac{2}{u} \quad (9.28)$$

La ecuación (9.28) indica que se producen 2 partículas de igual volumen por cada partícula u . Es importante resaltar que esta definición satisface además la ecuación (9.20) y se verifica ruptura binaria por evaluación de la ecuación (9.21), es decir:

$$u = \int_0^u v b(u,v) dv = \int_0^u v \frac{2}{u} dv = \frac{2}{u} \int_0^u v dv = \frac{2}{u} \frac{u^2}{2} = u \quad (9.29)$$

$$N_u = \int_0^u b(u,v) dv = \frac{2}{u} u = 2 \quad (9.30)$$

Cambiando los extremos de integración de la ecuación (9.26):

$$\begin{aligned} -\frac{dm_0}{dt} + S_0 \int_0^\infty n(u) du \int_0^u \frac{2}{u} dv - S_0 \int_0^\infty n(v) dv &= 0 \\ -\frac{dm_0}{dt} + S_0 \int_0^\infty n(u) du \left(\frac{2}{u} u \right) - S_0 \int_0^\infty n(v) dv &= 0 \\ -\frac{dm_0}{dt} + 2S_0 \int_0^\infty n(u) du - S_0 \int_0^\infty n(v) dv &= 0 \end{aligned} \quad (9.31)$$

De la ecuación 9.31 resulta:

<p>!!!!</p> <p>Molino discontinuo, perfectamente mezclado, ruptura binaria pura, constante de velocidad de ruptura cte.</p>	$\frac{dm_0}{dt} = S_0 m_0 \quad (9.32)$
--	--

Las ecuaciones de momento pueden fácilmente extenderse a molinos con entradas y salidas, o aplicarse a otros sistemas de interés.

Ejemplo

Un cultivo batch se inicia con un inóculo de $2 \cdot 10^5$ bacterias. El crecimiento exponencial cumple con el balance de población descrito por la ecuación 9.29. Estime el número de bacterias después de 30 minutos de operación, teniendo en cuenta que $\mu_{\max} = 0.1 \text{ min}^{-1}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu_{\max} x & x_0 &= & 2.00\text{E}+05 & \text{ bacterias} \\ \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) &= \mu_{\max} t & t &= & 30 & \text{ min} \\ x &= x_0 \exp(\mu_{\max} t) & \mu_{\max} &= & 1.00\text{E}-01 & \text{ min}^{-1} \\ & & x &= & 4.02\text{E}+06 & \text{ bacterias} \end{aligned}$$

9.6. Balance de Población Microscópico

9.6.1. En número

El balance de población para un molino perfectamente mezclado que opera de manera discontinua es:

$$-\frac{\partial n}{\partial t} + \int_v^{\infty} b(u, v) S(u) n(u) du - S(v) n(v) = 0 \quad (9.33)$$

El balance discretizado puede obtenerse integrando la ecuación (9.33) entre dos volúmenes de partículas consecutivos.

$$-\int_{v_i}^{v_{i+1}} \frac{\partial n}{\partial t} dv + \int_{v_i}^{v_{i+1}} \int_v^{\infty} b(u, v) S(u) n(u) du - \int_{v_i}^{v_{i+1}} S(v) n(v) dv = 0 \quad (9.34)$$

Aplicando los mismos conceptos vistos para la aglomeración (los alumnos interesados en la deducción pueden consultar el libro publicado por Ramkrishna; 2000) el balance de manera discreta resulta:

!!!!

Molino discontinuo, perfectamente mezclado.

$$-\frac{dn_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) n_j^* - S_i n_i^* = 0 \quad (9.35)$$

donde $b^\#$ tiene unidades de $(\#/\#)$.

La ecuación (9.35) como en el caso de aglomeración ha sido obtenida asumiendo que las funciones continuas de la ecuación (9.33) pueden ser expresadas como variables discontinuas, de manera que al trabajar con la ecuación (9.35) con grillas fijas y deltas de tiempos grandes se puede incurrir en errores del cálculo de la masa total del sistema (la cual no debe variar). El uso de técnicas más sofisticadas que aseguren la preservación de los momentos fundamentales ha sido discutido, entre otros, por Kumar y Ramkrishna (1996).

Si extendemos el balance a un molino donde existan corrientes de entrada y salida, la ecuación (9.35) se puede expresar como:

<p style="text-align: center;">!!!!!</p> <p>Molino continuo en estado no estacionario, perfectamente mezclado.</p>	$-\frac{dn_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) n_j^* - S_i n_i^* + \frac{Q_{in}}{V} n_{i,in}^* - \frac{Q_{out}}{V} n_i^* = 0 \quad (9.36)$
	$-\frac{dn_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) n_j^* - S_i n_i^* + \frac{1}{\tau_{in}} n_{i,in}^* - \frac{1}{\tau_{out}} n_i^* = 0 \quad (9.37)$

Para molinos suelen encontrarse muchos trabajos donde se expresa el PBE en función de masa en lugar de número, por esta razón presentaremos el PBE por ruptura pura en términos de masa.

9.6.2. En masa

Dada la ecuación 9.37,

$$-\frac{dn_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) n_j^* - S_i n_i^* + \frac{1}{\tau_{in}} n_{i,in}^* - \frac{1}{\tau_{out}} n_i^* = 0 \quad (9.37)$$

y la definición de masa de la clase i:

$$m_i^* = n_i^* \rho_p x_i \quad (9.38)$$

donde m_i^* y x_i son la masa y el volumen de la clase i, respectivamente.

Reemplazando la expresión (9.38) en la (9.37), y teniendo en cuenta que en una grilla fija los tamaños x_i no varían con el tiempo:

$$-\frac{1}{\rho_p x_i} \frac{dm_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) \frac{m_j^*}{\rho_p x_j} - S_i \frac{m_i^*}{\rho_p x_i} + \frac{1}{\tau_{in}} \frac{m_{i,in}^*}{\rho_p x_i} - \frac{1}{\tau_{out}} \frac{m_i^*}{\rho_p x_i} = 0 \quad (9.39)$$

Multiplicando a ambos términos por $\rho_p x_i$, se obtiene:

$$-\frac{dm_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^\#(x_i, x_j) \frac{x_i}{x_j} m_j^* - S_i m_i^* + \frac{1}{\tau_{in}} m_{i,in}^* - \frac{1}{\tau_{out}} m_i^* = 0 \quad (9.40)$$

La función de distribución de la ruptura ($\#/\#_j$) puede ser reemplazada por una función de ruptura en masa como sigue:

$$b^\#(x_i, x_j) \frac{x_i}{x_j} = b^*(x_i, x_j) \quad (9.41)$$

Las unidades de la nueva función de ruptura son (g_i/g_j), por lo tanto el PBE final en masa se reduce a:

$$-\frac{dm_i^*}{dt} + \sum_{j=i+1}^M S_j b^*(x_i, x_j) m_j^* - S_i m_i^* + \frac{1}{\tau_{in}} m_{i,in}^* - \frac{1}{\tau_{out}} m_i^* = 0 \quad (9.42)$$

Ejemplo

Considere un molino de tambor para moler cacao, el equipo permanece en estado estacionario y con $\tau_{in} = \tau_{out} = 10$ min. Se alimentan 1 kg/min de partículas monodispersas del tamaño de la clase 6.

Datos adicionales

Clase	1	2	3	4	5	6
S_j	0	0.3	0.35	0.5	0.6	0.7
$b(1,j)$	0	1.0	0.4	0.25	0.2	0.12
$b(2,j)$	0	0	0.6	0.25	0.2	0.12
$b(3,j)$	0	0	0	0.5	0.2	0.14
$b(4,j)$	0	0	0	0	0.4	0.3
$b(5,j)$	0	0	0	0	0	0.32
$b(6,j)$	0	0	0	0	0	0

Solución:

Antes del planteo de las ecuaciones para la resolución del modelo se discutirá algunos aspectos vinculados al tiempo de residencia. El tiempo de residencia tal como lo hemos descrito está dado por la siguiente ecuación:

$$\tau = \frac{V}{Q}; \quad \left[\frac{L^3}{L^3/t} \right] \quad (9.43)$$

Si se multiplica por la densidad de la partícula en el numerador y denominador de la ecuación (9.39), resulta:

$$\tau = \frac{V\rho_p}{Q\rho_p} = \frac{M_T}{\dot{m}}; \quad \left[\frac{g}{g/t} \right] \quad (9.44)$$

Considerando que la composición de una mezcla de partículas puede definirse por la masa fraccional y_i de la corriente, se puede multiplicar y dividir el lado derecho de la ecuación (9.44) por y_i :

$$\tau = \frac{M_T}{\dot{m}} \frac{y_i}{y_i} = \frac{m_i^*}{\dot{m}_i} \quad (9.45)$$

Teniendo en cuenta que en este ejemplo entra una población monodispersa:

$$\tau_{in} \dot{m}_{in} = m_{6in}^* \quad (9.46)$$

El PBE para este caso puede expresarse como:

$$\sum_{j=i+1}^M S_j b^*(x_i, x_j) m_j^* - S_i m_i^* + \frac{1}{\tau_{in}} m_{i,in}^* - \frac{1}{\tau_{out}} m_i^* = 0 \quad (9.47)$$

Para las clases existentes podemos plantear diferentes balances:

Clase 1

$$S_2 b^*(1,2) m_2^* + S_3 b^*(1,3) m_3^* + S_4 b^*(1,4) m_4^* + S_5 b^*(1,5) m_5^* + S_6 b^*(1,6) m_6^* - S_1 m_1^* + 0.1 m_{1,in}^* - 0.1 m_1^* = 0$$

Clase 2

$$S_3 b^*(2,3) m_3^* + S_4 b^*(2,4) m_4^* + S_5 b^*(2,5) m_5^* + S_6 b^*(2,6) m_6^* - S_2 m_2^* + 0.1 m_{2,in}^* - 0.1 m_2^* = 0$$

Clase 3

$$S_4 b^*(3,4) m_4^* + S_5 b^*(3,5) m_5^* + S_6 b^*(3,6) m_6^* - S_3 m_3^* + 0.1 m_{3,in}^* - 0.1 m_3^* = 0$$

Clase 4

$$S_5 b^*(4,5) m_5^* + S_6 b^*(4,6) m_6^* - S_4 m_4^* + 0.1 m_{4,in}^* - 0.1 m_4^* = 0$$

Clase 5

$$S_6 b^*(4,6) m_6^* - S_5 m_5^* + 0.1 m_{5,in}^* - 0.1 m_5^* = 0$$

Clase 6

$$-S_6 m_6^* + 0.1 m_{6,in}^* - 0.1 m_6^* = 0$$

Reemplazando los datos dados en el problema, resulta:

Clase 1

$$(0.3)(1) m_2^* + (0.35)(0.4) m_3^* + (0.5)(0.25) m_4^* + (0.6)(0.2) m_5^* + (0.7)(0.12) m_6^* - 0.1 m_1^* = 0$$

Clase 2

$$(0.35)(0.6) m_3^* + (0.5)(0.25) m_4^* + (0.6)(0.2) m_5^* + (0.7)(0.12) m_6^* - (0.3) m_2^* - 0.1 m_2^* = 0$$

Clase 3

$$(0.5)(0.5) m_4^* + (0.6)(0.2) m_5^* + (0.7)(0.14) m_6^* - (0.35) m_3^* - 0.1 m_3^* = 0$$

Clase 4

$$(0.6)(0.4) m_5^* + (0.7)(0.3) m_6^* - (0.5) m_4^* - 0.1 m_4^* = 0$$

Clase 5

$$(0.7)(0.32) m_6^* - (0.6) m_5^* - 0.1 m_5^* = 0$$

Clase 6

$$-(0.7) m_6^* + (0.1)(10) - 0.1 m_6^* = 0$$

Solución clase 6

$$m_6^* = 1.25 \text{ Kg}$$

Solución clase 5

$$m_5^* = 0.4 \text{ Kg}$$

Solución clase 4

$$m_4^* = 0.5975 \text{ Kg}$$

Solución clase 3

$$m_3^* = 0.710833333 \text{ Kg}$$

Solución clase 2

$$m_2^* = 0.94240625 \text{ Kg}$$

Solución clase 1

$$m_1^* = 6.09926042 \text{ Kg}$$

Se verifica que $\sum_1^6 m_i^* = 10 \text{ Kg}$, por lo tanto se preserva la masa total de la población en el molino, lo cual es razonable si está operando en estado estacionario.

9.7. Bibliografía:

- Austin, L.G., Trass O., Size Reduction of Solids Crushing and Grinding Equipment, Capítulo 12 en Handbook of Powder Science & Technology, editado por Fayed, M. E., Otten, L., Chapman & Hall, N.Y., 1997.
- Gupta, A., Yan, D., Mineral Processing and Operation, Elsevier, 2006.
- Kumar S., Ramkrishna, D., "On the Solution of Population Balance Equations by Discretization-I. A Fixed Pivot Technique", Chem. Eng. Sci., 51(8), 1311-1332, 1996.
- Litster, J., Ennis, B., Liu, L., The Science and Engineering of Granulation Processes, Kluwer Academia Publishers, 2004.
- Ramkrishna, D., Population Balances. Theory and Applications to Particulate Systems in Engineering, Academic Press, USA, 2000.
- Ortigas-Rivas, E., Handling and Processing of Food Powders and Particulars, Capítulo 4 en "Encapsulated and Powdered Foods), editado por Onwulata C., CRS Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, USA, 2005.