Capítulo 3. SISTEMAS DE PARTÍCULAS

3.1. Introducción

En la mayoría de los sistemas particulados existen partículas de distinto tamaño tal como se observa en la Figura 3.1. Muchos de los métodos que miden tamaño de partículas tienen que considerar la naturaleza dispersa de la población.

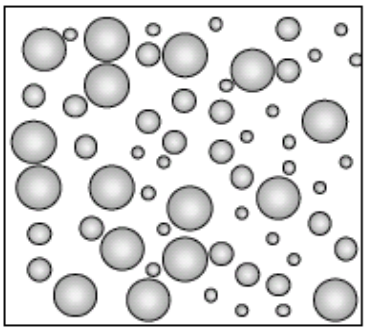


Figura 3.1. Sistemas de partículas de distintos tamaños

3.2. Métodos de medición de tamaño de partículas

3.2.1. Tamizado

Esta técnica es adecuada para el análisis de partículas que se encuentren el rango de **125 mm a 20 μm**.

La muestra de partículas es tamizada en una torre de tamices con mallas de distinto diámetro que siguen una progresión geométrica y se encuentran estandarizados. Una vez que se establece la torre de tamices, se colocan en un equipo que agita el conjunto de tamices por el tiempo que se desee, o la técnica requiera. En general, si se carga más masa mayor tiempo de tamizado será requerido.

Figura 3.1. Tren de tamices y equipo de agitación.

El tamiz que tiene la apertura mayor se coloca arriba, y un recipiente ciego al fondo para contener todas las partículas pequeñas que pasan el tamiz de menor apertura (ver Figura 3.2). Una vez terminado el proceso de tamizado se pesa lo recolectado en cada tamiz, los datos luego se representan de diversas maneras como se verá a continuación. Es importante recalcar que el análisis por tamizado da resultados en **masa**. El método de tamices es muy usado porque requiere baja inversión, los operadores no tienen que ser muy calificados, la técnica es simple.

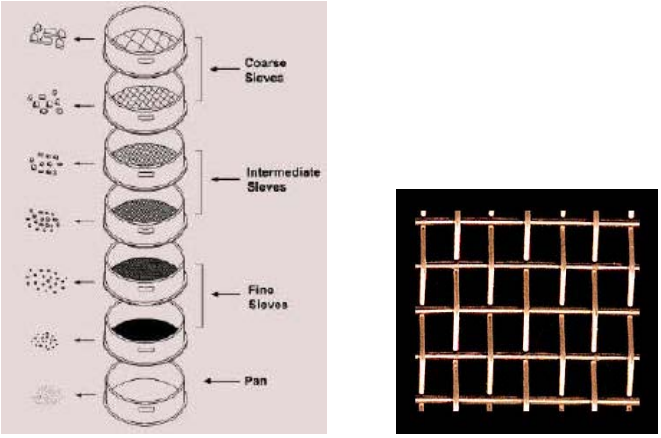


Figura 3.2. Esquema de orden de tamices y vista de una malla.

3.2.1.1. Mallas

Las mallas que poseen los tamices pueden ser especificadas por el número de aperturas por pulgada lineal (MESH) y el espesor del alambre; o también por el diámetro de apertura (d_A). En la Figura 3.3 se muestran mallas de diferente “MESH”, cuanto más grande es el “MESH” menor la apertura. El tamaño de las partículas queda determinado por los diámetros de tamiz.

3.2.1.2. Tamices estándares

Existen muchos tamices estándares por ejemplo: ASTM (EEUU), BSI (Gran Bretaña), DIN (Alemania), AFNOR (Francia), JSA/JIS (Japón), ISO (Normas internacionales).

En general las aperturas siguen una progresión geométrica que puede ser, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$. Por lo tanto el cociente de dos diámetros de tamiz consecutivos debe dar una razón siempre constante (ver Tabla 3.1).

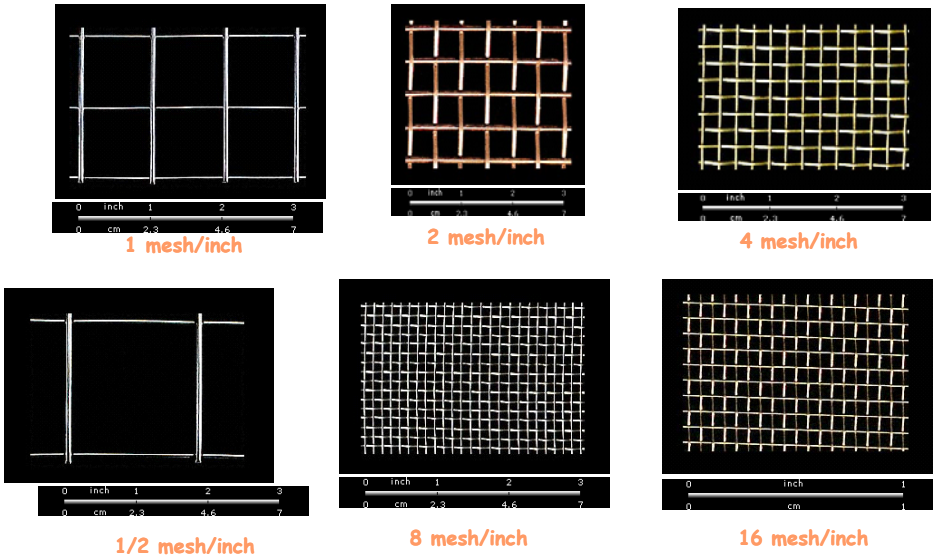


Figura 3.3. Mallas de distinta apertura. Mesh vs. d_A.

Tabla 3.1. Tamices estándares ASTM

ASTM	Sieve Opening (in)	Sieve Opening (mm)	$d_{i-1}=d_i/(2^{0.25})$ (in)
4	0.187	4.76	
5	0.157	4	0.15724763
6	0.132	3.36	0.132020737
7	0.111	2.83	0.110998327
8	0.0937	2.38	0.093339502
10	0.0787	2	0.078791994
12	0.0661	1.68	0.066178548
14	0.0555	1.41	0.055583253
16	0.0469	1.19	0.046669751
18	0.0394	1	0.039438042
20	0.0331	0.84	0.033131319
25	0.028	0.71	0.027833671
30	0.0232	0.589	0.0235451
35	0.0197	0.5	0.019508797
40	0.0165	0.42	0.016565659
45	0.0138	0.351	0.013874791
50	0.0117	0.297	0.011604371
60	0.0098	0.25	0.009838488
70	0.0083	0.21	0.008240785
80	0.007	0.177	0.00697944
100	0.0059	0.149	0.005886275
120	0.0049	0.124	0.004961289
140	0.0041	0.104	0.004120392
170	0.0035	0.088	0.003447675
200	0.0029	0.074	0.002943137

En la Tabla 3.2 se muestran las aperturas de diferentes tamices estándares.

Tabla 3.2. Tamices estándares

Mesh Size (microns)	**TYLER**	**ASTM-E11**	**BS-410**	**DIN-4188**
µm	Mesh	No.	Mesh	mm
5	2500		2500	0.005
10	1250		1250	0.01
15	800		800	0.015
20	625		625	0.02
22				0.022
25	500		500	0.025
28				0.028
32				0.032
36				0.036
38	400	400	400	
40				0.04
45	325	325	350	0.045
50				0.05
53	270	270	300	
56				0.056
63	250	230	240	0.063
71				0.071
75	200	200	200	
80				0.08
90	170	170	170	0.09
100				0.1
106	150	140	150	
112				0.112
125	115	120	120	0.125
140				0.14
150	100	100	100	
160				0.16
180	80	80	85	0.18
200				0.2
212	65	70	72	
250	60	60	60	0.25
280				0.28
300	48	50	52	
315				0.315
355	42	45	44	0.355
400				0.4
425	35	40	36	
450				0.45
500	32	35	30	0.5
560				0.56
600	28	30	25	

3.2.2. Microscopía

La microscopía es el único método que permite la observación y medición de partículas individuales. Mediante la observación de las partículas es posible establecer tamaño, forma y morfología. Los valores de tamaño que se obtengan por microscopía

serán más exactos en la medida que se midan más partículas. El resultado del análisis permite establecer el **número** de partículas. El rango de análisis recomendado para **microscopios ópticos** es **3μm-150μm**. Los **microscopios electrónicos** pueden analizar partículas de menor tamaño, aproximadamente entre **0.01μm-100μm.**

Las imágenes que se ven en el microscopio son áreas proyectadas, de manera que las dimensiones dependen de la orientación de las partículas. Se miden los diámetros de Feret, de Martin, de perímetro o de área proyectada.

Los microscopios pueden tener algunos dispositivos automáticos que permiten medir las partículas automáticamente. La Figura 3.4. muestra la digitalización de partículas, cálculo del área proyectada y de d_a.

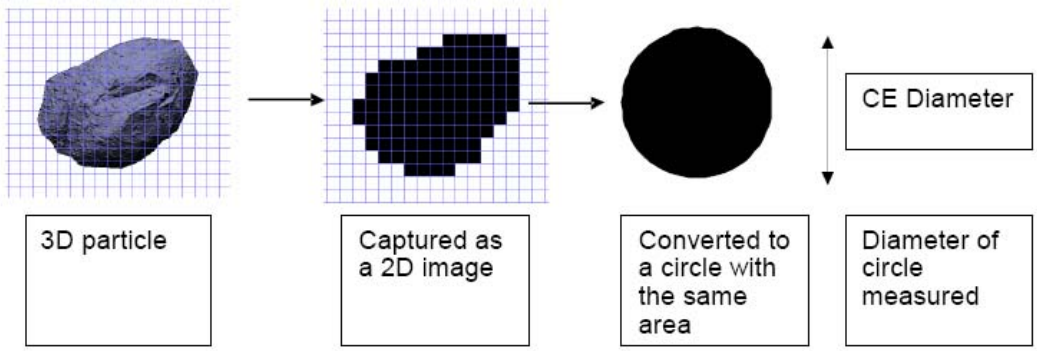


Figura 3.4. Digitalización de imágenes y procesamiento de datos. Fuente: www.malvern.com.

3.2.3. Elutriación

La elutriación por aire es especialmente útil para **polvos finos**, los cuales pueden ser clasificados sometiendo las muestras a diferentes caudales de aire. Aquellas partículas que alcancen su velocidad terminal (definida por la velocidad de aire en el ensayo), serán arrastradas y podrán ser colectadas aguas abajo del equipo, por ejemplo con un filtro. Luego se aumenta el caudal de aire y se recolectan partículas más gruesas, y así sucesivamente.

3.2.4. Sedimentación

En esta técnica se calcula el diámetro de Stokes mediante la observación de la velocidad con la que caen las partículas en un medio fluido estacionario. Se diluye el sistema particulado, comúnmente en agua, para poder asumir que las partículas caen a la velocidad terminal de una partícula única en un medio líquido. Si se asume la Ley

de Stokes (tema que se verá en mayor detalle en el próximo capítulo), el Re debe ser menor a 0.25 (régimen laminar). Por lo tanto este método de sedimentación será aplicable a partículas menores a los **50 μm** (considerando como fluido agua a temperatura ambiente).

En la Figura 3.5 se muestra un equipo típico.

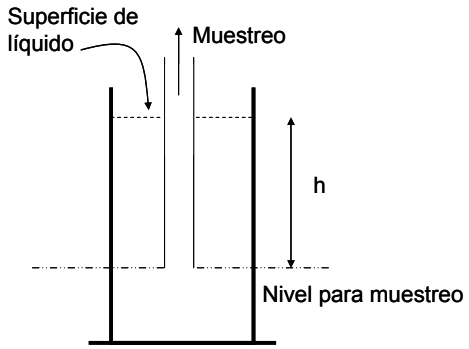


Figura 3.5. Análisis de tamaños por sedimentación. Fuente: Rhodes (2003).

La velocidad de sedimentación de las partículas se establece dibujando la densidad de la muestra retirada en una posición fija vs el tiempo. La densidad de la suspensión se relaciona con la masa de menor tamaño que queda aún por sedimentar. Por su parte el tiempo se lo relaciona con el diámetro de la partícula a través del diámetro de Stokes.

Para comprender mejor está técnica se introduce el ejemplo 3.1.

Ejemplo 3.1.

- Supongamos que el líquido con el material particulado posee una densidad ρ_0. Al tiempo t, en el punto de muestreo consideremos que la densidad del líquido con material particulado es ρ.
- A ese dado tiempo, todas aquellas partículas que viajan mas rápido que v=h/t habrán caído debajo del punto de muestreo.
- Al tiempo t la muestra tomada tendrá sólo aquellas partículas que han viajado a una velocidad $\leq$ h/t.
- La relación ρ/ρ_0 representa la fracción másica de partículas que viajan a una velocidad $\leq$ h/t.
- Podemos hacer igual la velocidad terminal a: v_T=h/t, reemplazando esta relación en la expresión vista en el capítulo 2:

$$d_{St} = \left[\frac{18\, v_T\, \mu}{(\rho_p - \rho_f)\, g} \right]^{1/2} \tag{2.8}$$

Resulta:

$$d_{St} = \left[\frac{18\, h\, \mu}{t(\rho_p - \rho_f)\, g} \right]^{1/2} \tag{3.1}$$

- Por lo tanto la masa de partículas definida por la relación ρ/ρ_0 posee un diámetro menor a d_{St}.
- Tomando muestras a distintos tiempos es posible establecer la fracción másica de partículas correspondientes a distintos diámetros.

3.2.5. Difracción Láser

La técnica de difracción láser se basa en el principio que cuando partículas atraviesan una luz láser la dispersan con un ángulo que está directamente relacionado con el tamaño de las partículas. A medida que el tamaño de las partículas disminuye el ángulo de difracción que se observa aumenta logarítmicamente. Además la intensidad de la luz es dependiente del tamaño de las partículas, se relaciona con el área transversal de las partículas. Por lo tanto partículas de mayor tamaño difractan la luz a ángulos pequeños con mayor intensidad, mientras que las partículas pequeñas difractan con mayores ángulos y menor intensidad. En la Figura 3.6 se muestra un esquema de un equipo de difracción láser, el mismo posee los siguientes componentes:

- Un láser, que provee una fuente de luz a una longitud de onda constante.
- Un espacio donde se confina la muestra dispersa (con aire o líquido)
- Una serie de detectores para medir el patrón de luz.

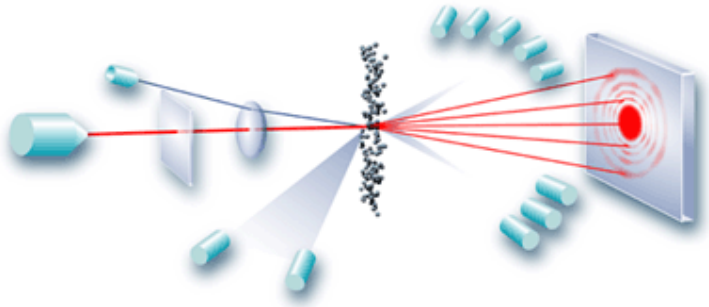


Figura 3.6. Incidencia del haz láser sobre material particulado y difracción del mismo.
Fuente: www.malvern.com.

3.3. Representación e interpretación de datos

3.3.1. Histogramas

En la Tabla 3.3. se muestran datos experimentales obtenidos mediante una técnica que permite cuantificar el número de partículas.

Tabla 3.3. Datos experimentales y cálculos elementales

Rango de tamaño, μm	Número, #	Fracción en número	Fracción porcentual, %	Fracción acumulativa, %
0-4	104	0.104	10.4	10.4
4-6	160	0.16	16	26.4
6-8	161	0.161	16.1	42.5
8-9	75	0.075	7.5	50
9-10	67	0.067	6.7	56.7
10-14	186	0.186	18.6	75.3
14-16	61	0.61	6.1	81.4
16-20	79	0.79	7.9	89.3
20-35	103	0.103	10.3	99.6
35-50	4	0.004	0.4	100
> 50	0	0	0	100
Total	**1000**		**100**	

En la Figura 3.7 se muestra un histograma donde para un dado rango de tamaño que mide el equipo se grafica el número total de partículas encontrado en dicho intervalo. Los tamaños pueden seguir una progresión aritmética o geométrica, eso depende del equipo de análisis usado. En el eje *y* se puede graficar número, volumen, masa, o cualquier propiedad de la partícula que mida el instrumental elegido, expresada como una magnitud absoluta, fraccional o fraccional porcentual (columnas 2, 3 y 4 de la Tabla 3.3). Por su parte en el eje x puede graficarse el diámetro, volumen o masa de las distintas clases de tamaño dadas.

El símbolo n_i^* representa el número de partículas de la clase i.

La última columna de la Tabla 3.3 representa la fracción en número acumulativa pasante, esta variable también puede ser graficada en un histograma.

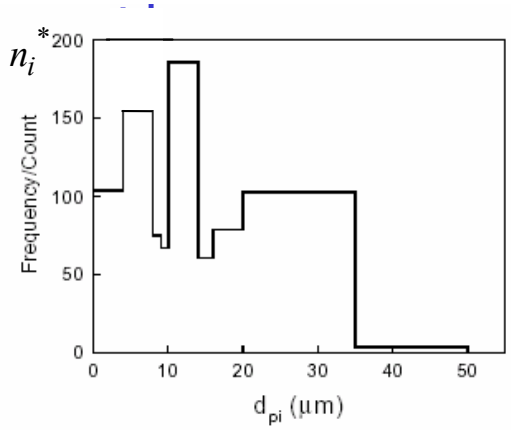


Figura 3.7. Histograma. Número vs. diámetro de partícula

La Figura 3.7 muestra una curva discontinua, comúnmente se suelen elaborar funciones continuas asignándole el número o masa obtenido experimentalmente en un dado rango de tamaños al promedio aritmético entre los extremos del intervalo. La Tabla 3.4 repite parte de la información de la Tabla 3.3 con el cálculo de los diámetros promedios aritméticos.

Tabla 3.4. Cálculo de diámetros aritméticos promedios

Rango de medida, μm	Número, #	dp promedio, μm	
0-4	104	2	=(4+0)/2=2
4-6	160	5	
6-8	161	7	
8-9	75	8.5	
9-10	67	9.5	
10-14	186	12	
14-16	61	15	
16-20	79	18	
20-35	103	27.5	
35-50	4	42.5	=(50+35)/2=42.5
> 50	0		
Total	1000		

En la Figura 3.8 se muestra como se construye y queda finalmente la curva continua de número de partículas vs. diámetro.

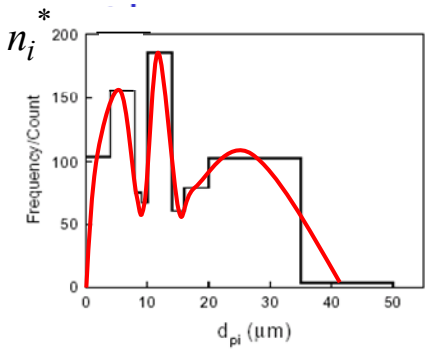


Figura 3.8.a. Obtención curva continua.

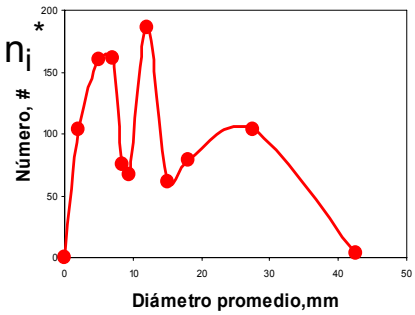


Figura 3.8.b. Curva continua obtenida.

Cuando las distribuciones de tamaño de partículas son angostas se recomienda el uso de una progresión aritmética para representar la población, determinándose el diámetro promedio del intervalo de tamaño como un promedio aritmético. En cambio cuando la distribución de tamaños es amplia, se prefiere usualmente una progresión de tamaños geométrica.

Tabla 3.5. Fracciones acumulativas

Rango de tamaño, µm	Apertura de mayor tamaño, µm	Número, #	Número, %	Fracción acumulativa pasante, %	Fracción acumulativa retenida, %
0-4	4	104	10.4	10.4	89.60
4-6	6	160	16	26.4	73.60
6-8	8	161	16.1	42.5	57.50
8-9	9	75	7.5	50	50.00
9-10	10	67	6.7	56.7	43.30
10-14	14	186	18.6	75.3	24.70
14-16	16	61	6.1	81.4	18.60
16-20	20	79	7.9	89.3	10.70
20-35	35	103	10.3	99.6	0.40
35-50	50	4	0.4	100	0.00
> 50		0	0		
Total		1000	100		

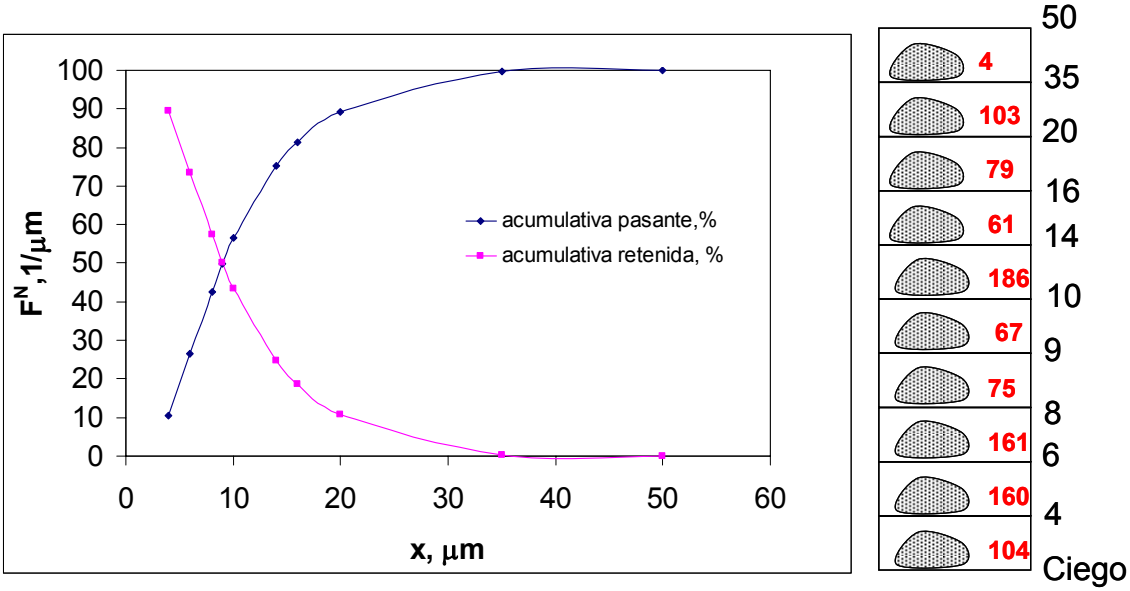


Figura 3.9. Curvas acumulativas continuas retenidas y pasantes. La función F^N está expresada en porcentaje.

La Tabla 3.5 muestra como calcular las fracciones acumulativas retenidas y pasantes, estas fracciones se grafican como puede observarse en la Figura 3.9.versus la mayor apertura de los tamices.

El símbolo N_i representa el número de partículas acumuladas pasantes incluyendo todas las partículas de la clase i.

3.3.2. Histograma de la distribución de frecuencia o función densidad.

Las distribuciones de tamaño de partícula expresadas como masa vs. diámetro no son adecuadas para la comparación de distribuciones (tema que será discutido en más detalle en la sección 3.3.7). Por esta razón surge una función denominada distribución de frecuencia o densidad, la cual se calcula como sigue:

$$n_i = \frac{n_i^*}{\Delta dp_i} \tag{3.2}$$

donde n_i es la función densidad expresada de manera discreta, esta nueva variable tiene unidades en este caso de número/unidad de diámetro (e.g. #/μm).

Tabla 3.6. Función densidad

Rango de tamaño, μm	**Número, #**	**n_i=Número/Δd_{pi}, #/μm**
0-4	104	26.00
4-6	160	80.00
6-8	161	80.50
8-9	75	75.00
9-10	67	67.00
10-14	186	46.50
14-16	61	30.50
16-20	79	19.75
20-35	103	6.87
35-50	4	0.27
> 50	0	0.00
Total	1000	

En la Tabla 3.6 se ejemplifica como se calcula la función densidad de una manera discreta, mientras que en la Figura 3.10 se grafica el histograma de esta función. La función densidad, como su nombre lo indica, representa la el número de partículas o masa (o cualquier otra propiedad seleccionada) por unidad de tamaño. Esta variable se independiza de cuán grande o pequeña sea, por ejemplo, la distancia entre dos tamices consecutivos.

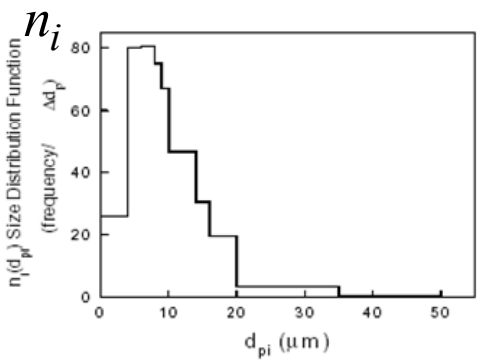


Figura 3.10. Histograma de la función densidad.

El símbolo n_i representa la distribución de frecuencia o densidad de partículas en la clase i. Sus unidades son número (o masa, volumen)/ unidad de longitud (o cualquier otra magnitud con la cual se desee caracterizar el tamaño de las partículas).

3.3.3. Histograma de la distribución de frecuencia normalizada

La distribución de frecuencia normalizada se calcula dividiendo la función densidad por el número total de partículas de la población, es decir:

$$f_i = \frac{n_i}{N_T} \tag{3.3}$$

donde f_i es la función de densidad normalizada y tiene unidades de (unidad de longitud)$^{-1}$. N_T representa el número de partículas totales de la población.

La Tabla 3.7, ejemplifica el cálculo de esta nueva función, mientras que la Figura 3.11 muestra el histograma de la función densidad normalizada.

Tabla 3.7. Función densidad

Rango de tamaño, μm	Número, #	Fracción en número	n_i=Número/Δd_{pi}, #/μm	fi=n_i/N_T, 1/μm
0-4	104	0.104	26.00	0.0260
4-6	160	0.16	80.00	0.0800
6-8	161	0.161	80.50	0.0805
8-9	75	0.075	75.00	0.0750
9-10	67	0.067	67.00	0.0670
10-14	186	0.186	46.50	0.0465
14-16	61	0.61	30.50	0.0305
16-20	79	0.79	19.75	0.0198
20-35	103	0.103	6.87	0.0069
35-50	4	0.004	0.27	0.0003
> 50	0	0	0.00	0.0000
Total	1000			

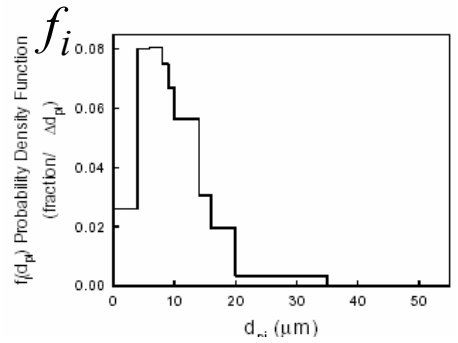


Figura 3.11. Histograma de la función densidad normalizada.

El símbolo f_i representa la frecuencia o densidad de partículas normalizada en la clase i. Sus unidades son 1/ unidad de longitud (o cualquier otra magnitud con la cual se desee caracterizar el tamaño de las partículas).

El símbolo N_T representa el número total de partículas.

3.3.4. Distribución de frecuencia continua

De acuerdo a la definición de la función densidad (ecuación 3.2), la siguiente igualdad debe satisfacerse:

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i \Delta dp_i = \sum_{i=1}^{\infty} n_i^* = N_T \tag{3.4}$$

Teniendo en cuenta la definición de la función densidad normalizada (ecuación 3.3), la siguiente relación también debe satisfacerse:

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \Delta dp_i = 1 \tag{3.5}$$

La ecuación 3.5 indica que el área debajo del histograma presentado en la Figura 3.11 debe ser igual a 1. La Figura 3.12 muestra que la función densidad normalizada continua puede obtenerse siempre y cuando se tenga la precaución que el área debajo de la curva satisfaga la condición (3.5). Con el objeto de mantener el área debajo de la curva puede observarse que la función continua debe bisectar a los rectángulos del histograma. Esta es la razón por la cual las distribuciones continuas se grafican habitualmente en función del diámetro promedio de los extremos del rango de análisis.

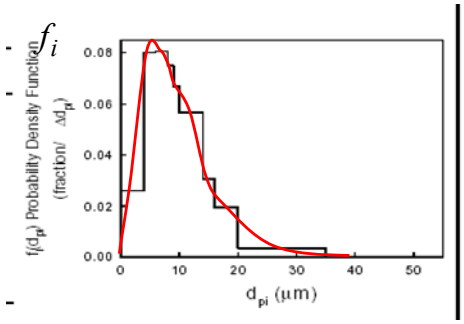


Figura 3.12.a. Obtención de la función distribución normalizada continua.

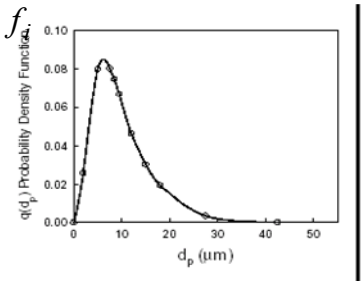


Figura 3.12.b. Función distribución normalizada continua.

3.3.5. Distribuciones continuas

Las ecuaciones (3.2) a (3.5) representan cálculos de funciones de distribución de manera discreta, sin embargo existen también expresiones para las funciones continuas. Comenzaremos con algunas definiciones básicas:

$$N(x) = \text{número acumulado de partículas} \tag{3.5}$$

Las unidades de N(x) son número. Cuando expresamos funciones continuas desaparecen los subíndices que señalan las clases y describimos que la variable es

función de (x). x representa cualquier variable con la cual se desea caracterizar el tamaño de la población, puede ser diámetro, volumen, superficie, etc.

La función densidad continua viene dada por la siguiente definición:

$$n(x) = \frac{dN(x)}{dx} \tag{3.6}$$

Donde las unidades de n(x) son $\#/\mu m$ si x por ejemplo representara el diámetro. De acuerdo a las definiciones anteriores, el número de partículas acumuladas hasta el tamaño x puede calcularse como sigue:

$$N(x) = \int_0^x n(x)dx \tag{3.7}$$

La función N(x) representa el número de partículas acumuladas, esta función puede ser normalizada como sigue:

$$F(x) = \frac{N(x)}{N_T} \tag{3.8}$$

F(x) representa la función acumulativa normalizada. Hasta este punto hemos definido funciones acumulativas, y densidades en función del número de partículas, sin embargo también pueden ser definidas por ejemplo en masa.

La Figura 3.13 resume las conversiones entre distribuciones acumulativas (no normalizadas y normalizadas) y distribuciones de frecuencia.

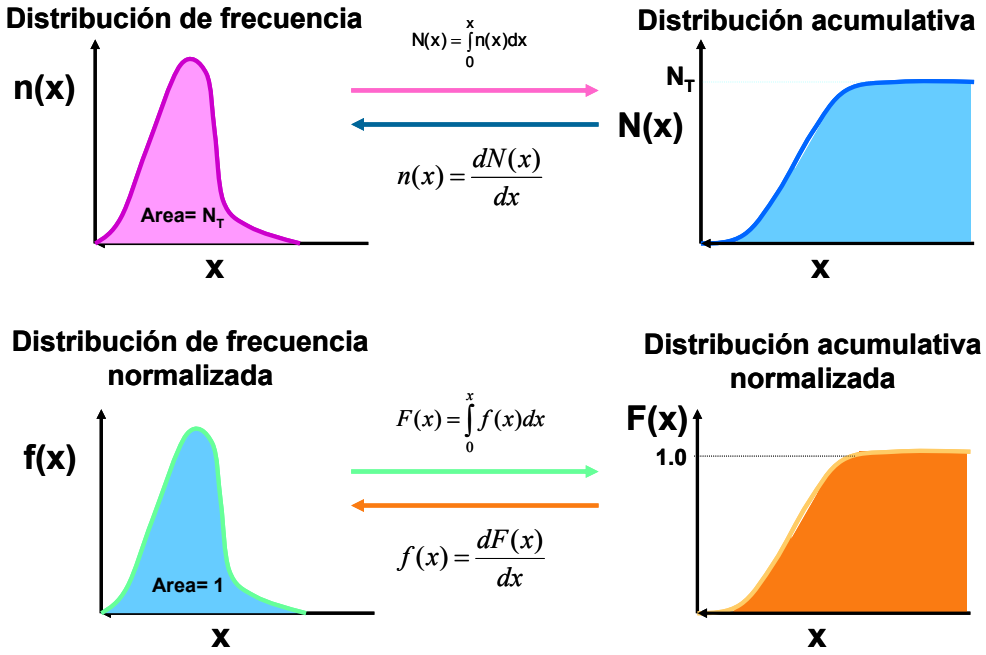


Figura 3.13. Conversiones entre curvas acumulativas y funciones densidad.

3.3.6. Resumen de relaciones entre funciones continuas y discontinuas

Tabla 3.8. Funciones continuas.

Tipo de distribución	Definición	Relaciones entre variables
Continua sin normalizar N(x) n(x)dx	Número de partículas totales (o acumuladas) menores que la medida x, # Número de partículas entre las medidas x y x+dx, #	$N(x) = \int_0^x n(x)dx$ $N_T = \int_0^\infty n(x)dx$ $n(x) = \frac{dN(x)}{dx}$
Continua normalizada F(x) f(x)dx	Fracción en número de partículas totales (o acumuladas) menores que la medida x, **adimensional** Fracción en número de partículas entre las medidas x y x+dx, **adimensional**	$F(x) = \frac{N(x)}{N_T}$ $f(x) = \frac{n(x)}{N_T}$ $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Tabla 3.9. Funciones discontinuas.

Tipo de distribución	Definición	Relaciones entre variables
<u>Discreta sin normalizar</u> N_i $n_i \Delta x_i = n_i^*$ x_i $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$	Número de partículas totales (o acumuladas) en todos los intervalos menores o iguales a la clase i, # Número de partículas en el intervalo i, # Medida máxima de las partículas en el intervalo i, **μm o μm³** Ancho o medida del intervalo i, **μm o μm³**	$N_i = N(x_i); \quad n_i = n(x_i)$ $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j^* = \sum_{j=1}^{i} n_j \Delta x_j$ $n_i \Delta x_i = n_i^* = N_i - N_{i-1}$ $N_T = \sum_{j=1}^{\infty} n_j^* = \sum_{j=1}^{\infty} n_j \Delta x_j$ $n_i = \frac{N_i - N_{i-1}}{\Delta x_i}$
<u>Discreta normalizada</u> F_i $f_i \Delta x_i$	Fracción en número de partículas totales (o acumuladas) en todos los intervalos menores o iguales a la clase i, **adimensional** Fracción en número de partículas en el intervalo i, **adimensional**	$F_i = \frac{N_i}{N_T} = F(x_i) \quad f_i = \frac{n_i}{N_T} = f(x_i)$ $f_i \Delta x_i = F_i - F_{i-1}$ $\sum_{j=1}^{\infty} f_i \Delta x_i = 1$ $f_i = \frac{F_i - F_{i-1}}{\Delta x_i}$

3.3.7. Comparación de distribuciones

La Tabla 3.10 muestra los datos experimentales de una misma muestra de partículas que fue tamizada tres veces. En primer lugar se utilizó un gran número de tamices (datos de “Fine Grid”), luego se retiraron algunos tamices del tren (datos de “Coarse Grid” 1). Por último se restituyeron los tamices retirados en la primera etapa y se quitaron otros (datos de “Coarse Grid” 2). Con los datos obtenidos y presentados en la Tabla 3.10 se construyeron los histogramas que se presentan en la Figura 3.14. Es claro que aún siendo la misma muestra, los gráficos son muy distintos no indicando la similaridad de la muestra. Esto se debe a que los histogramas tienen formas que dependen del ancho y número de los intervalos de medida. Por su parte la Figura 3.15 muestra el histograma de la función densidad y la obtención de la función continua. La Figura 3.16 compara las funciones densidad obtenidas para los datos correspondientes a las tres grillas usadas. En este gráfico se observa que se trata de

la misma muestra. Por lo tanto, debe quedar claro que si se desean comparar poblaciones debe utilizarse la función densidad o bien (datos no mostrados) las curvas acumulativas. Cualquiera de las dos representaciones resultan adecuadas.

Tabla 3.10. Análisis de una misma muestra con diferentes trenes de tamices.

T

Sieve Analysis of a Single Sample, Using Different Sets of Sieves

Fine Grid				Coarse Grid 1				Coarse Grid 2			
Size Range, mm	Count, #	n(dp), #/mm	dp_{av}, mm	Size Range, mm	Count, #	n(dp), #/mm	dp_{av}, mm	Size Range, mm	Count, #	n(dp), #/mm	dp_{av}, mm
0.00-0.21	0	0.00	0.11	0.00-0.297	0	0.00	0.15	0.00-0.21	0	0.00	0.11
0.21-0.297	0	0.00	0.25	0.297-0.59	30	102.39	0.44	0.21-0.42	10	47.62	0.32
0.297-0.42	10	81.30	0.36	0.59-1.19	90	150.00	0.89	0.42-0.84	50	119.05	0.63
0.42-0.59	20	117.65	0.51	1.19-2.00	160	197.53	1.60	0.84-1.68	160	190.48	1.26
0.59-0.84	30	120.00	0.72	2.00-3.36	40	29.41	2.68	1.68-2.38	90	128.57	2.03
0.84-1.19	60	171.43	1.02	3.36-4.76	0	0.00	4.06	2.38-4.76	10	4.20	3.57
1.19-1.68	100	204.08	1.44	4.76-5.66	0	0.00	5.21	4.76-5.66	0	0.00	5.21
1.68-2.00	60	187.50	1.84		N_T=320				N_T=320		
2.00-2.38	30	78.95	2.19								
2.38-3.36	10	10.20	2.87								
3.36-4.76	0	0.00	4.06								
4.76-5.66	0	0.00	5.21								
	N_T=320										

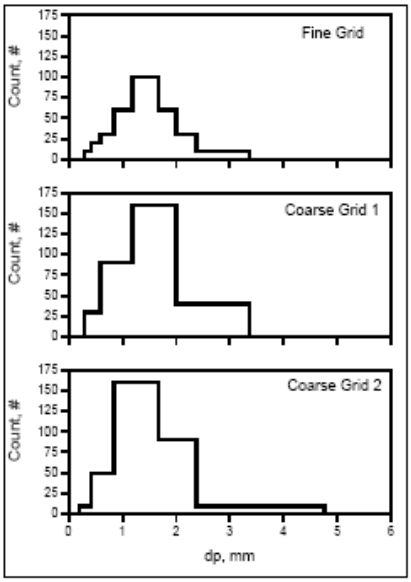


Figura 3.14. Histogramas de una misma muestra analizadas con distintos trenes de tamices.

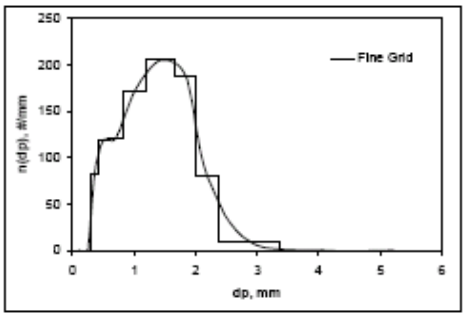


Figura 3.15. Histograma de la función densidad y obtención de la curva continua.

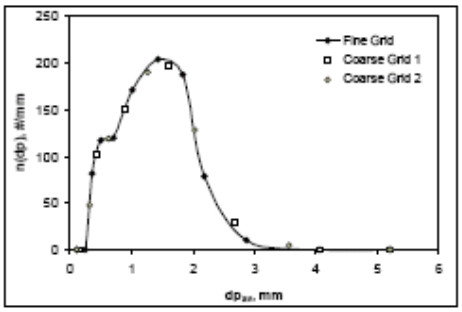


Figura 3.16. Comparación entre las funciones densidad obtenidas con distintas grillas.

3.4. Diámetros promedios

La definición de una distribución de tamaño de partículas en forma completa requiere mucha información, como por ejemplo los datos dados en la Tabla 3.11. Sería conveniente poder aproximar las distribuciones con alguna función matemática. Existen varias representaciones, en general ellas requieren información acerca de donde se localiza la distribución y cuan ancha es. La localización de la curva puede referenciarse adecuadamente con algún diámetro promedio. A continuación veremos las definiciones de los tamaños promedios más usados.

Para ejemplificar los cálculos utilizaremos los datos del siguiente ejemplo:

Tabla 3.11. Ejemplo para el cálculo de diámetros promedio.

d inf, μm	d sup, μm	Número, #	n(dp), #/μm	f(dp), %/μm	F(dp), %	d prom, μm
0	5	39	7.8	0.78	3.9	2.5
5	10	175	35	3.5	21.4	7.5
10	20	348	34.8	3.48	56.2	15
20	30	187	18.7	1.87	74.9	25
30	40	112	11.2	1.12	86.1	35
40	60	89	4.45	0.445	95	50
60	80	27	1.35	0.135	97.7	70
80	100	13	0.65	0.065	99	90
100	150	8	0.16	0.016	99.8	125
150	200	2	0.04	0.004	100	175
		1000				

3.4.1. Moda

La moda es el punto de mayor frecuencia, se refiere al valor máximo de la curva n(x) o f(x) (función densidad o distribución de frecuencia) vs. x. Este valor se puede observar en la Figura 3.17. La moda para el ejemplo de la Tabla 3.11 es aproximadamente 11 μm. La moda es el máximo de la curva n(x) o f(x) vs x, o dicho de otra manera corresponde al valor de tamaño para el cual la curva acumulativa alcanza su punto e inflexión. En otras palabras en la moda **a** se verifica que:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_a = 0 \tag{3.9}$$

La condición de punto de inflexión es:

$$\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_a \neq 0 \quad , y \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{d^2F(x)}{dx^2}\right|_a = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_a = 0 \tag{3.11}$$

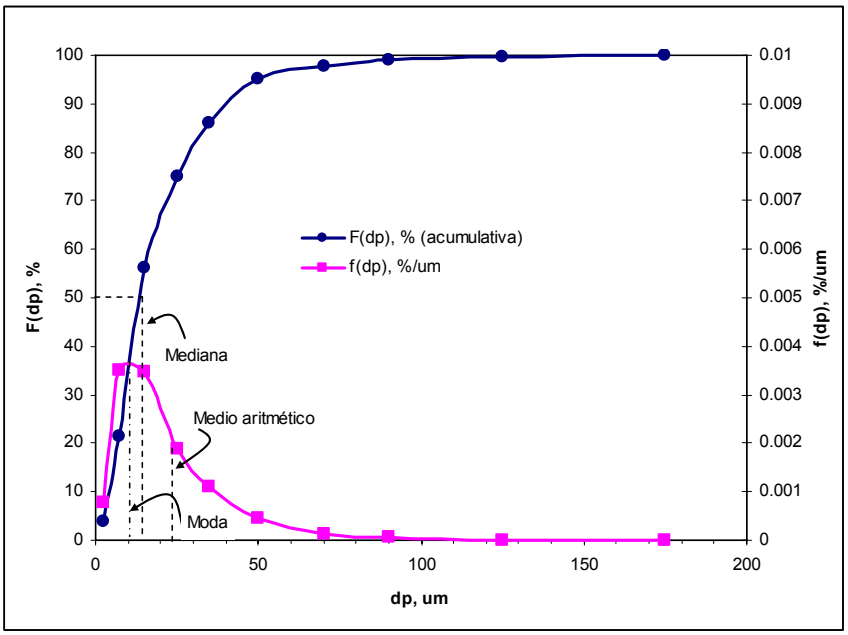


Figura 3.17. Moda,mediana y medio aritmético.

3.4.2. Mediana

La mediana es el tamaño de partículas que divide la curva de la función distribución o densidad en dos partes de igual área, y a la vez es el diámetro donde la curva acumulativa alcanza el 50% de su valor. En términos matemáticos puede decirse que la mediana verifica la siguiente condición:

$$50\% = \int_0^a f(x)dx \quad y \quad F(a) = 50\% \tag{3.12}$$

Para que se verifique la ecuación (3.12), f(x) debe estar expresada en porcentajes por unidad de tamaño de partícula. La mediana también suele denominarse x_{50}. Para el ejemplo de la Tabla 3.11. la mediana es 14 μm.

3.4.3. Diámetro medio aritmético en número (media)

La media es el centro de gravedad de la distribución. Para una distribución en número el diámetro medio aritmético (x_{aN}: *a*=aritmético; N: número) (o genéricamente tamaño medio aritmético) se calcula como sigue:

$$x_{aN} = \frac{\sum n_i^* x_i}{\sum n_i^*} = \frac{\int_0^\infty x n(x) dx}{\int_0^\infty n(x) dx} = \int_0^\infty x f(x) dx \qquad (3.13)$$

Para el ejemplo planteado el diámetro medio aritmético es alrededor de 24 micrones y también se muestra en la Figura 3.17. Es importante tener en cuenta que el valor del x_i usado en la ecuación 3.13 corresponde al valor medio aritmético de los extremos del intervalo de medición.

Si la distribución es simétrica las tres medias antes vistas (moda, mediana y media aritmética) son coincidentes. En cambio si la distribución está sesgada hacia los tamaños más grandes (que resulta común para una gran número de sistemas particulados, ver ejemplo de la Figura 3.17) resulta que media>mediana> moda.

Los tamaños medios sólo pueden representar **dos** de las propiedades de un sistema particulado. Entre las propiedades de la población cabe mencionar: número total, longitud total, volumen (o masa) total.

En otras palabras un sistema de partículas de diferentes tamaños puede ser representado por un sistema de partículas uniformes que tiene **dos** y sólo dos características idénticas a la distribución original.

Por ejemplo para el diámetro medio aritmético en número se conservan sólo el número total de partículas y la longitud total de la población original, en términos matemáticos:

Número total: $$\sum n_i^* = N_T \qquad (3.14)$$

Longitud total: $$x_{aN} N_T = \sum n_i^* x_i \qquad (3.15)$$

Como x_{aN} mantiene el número y la longitud, también se suele escribir como sigue:

$$x_{aN} = x_{NL} \qquad (3.16)$$

3.4.4. Otras definiciones de tamaños medios

Hay muchas definiciones de tamaños medios, debe usarse la media que refleje la propiedad más importante para la aplicación en la cual se usará el tamaño promedio calculado. Esto es importante ya que dependiendo de la media que se elija la población será caracterizada por un valor promedio numéricamente muy diferente. En la Tabla 3.12 se resumen tamaños medios comúnmente calculados.

Para entender las propiedades que se mantienen de la distribución original, se tomará el ejemplo de x_{LS} presentado en la Tabla 3.12. Este tamaño medio debe verificar que la población de partículas uniformes que posea ese tamaño mantenga la longitud y la superficie de la población original, esto es:

Longitud total: $$x_{LS}\, N_T = \sum n_i^* x_i \qquad (3.17)$$

Superficie total: $$x_{LS}^2\, N_T = \sum n_i^* x_i^2 \qquad (3.18)$$

Dividiendo (3.18) por (3.17) resulta:

$$x_{LS} = \frac{\sum n_i^* x_i^2}{\sum n_i^* x_i} \qquad (3.19)$$

Tabla 3.12. Tamaños medios.

Propiedades de la distribución original que se mantienen	**Expresión discreta**	**Expresión continua**
Número, Longitud (Medio aritmético en número o longitud media)	$x_{NL} = \frac{\sum n_i^* x_i}{\sum n_i^*}$	$x_{NL} = \frac{\int_0^\infty x n(x) dx}{\int_0^\infty n(x) dx} = \int_0^\infty x f^N(x) dx$
Número, Superficie (Medio Cuadrático o de superficie media)	$x_{NS} = \left(\frac{\sum n_i^* x_i^2}{\sum n_i^*} \right)^{1/2}$	$x_{NS}^2 = \frac{\int_0^\infty x^2 n(x) dx}{\int_0^\infty n(x) dx} = \int_0^\infty x^2 f^N(x) dx$
Número, Volumen (Medio Cúbico o de volumen/masa medio)	$x_{NV} = \left(\frac{\sum n_i^* x_i^3}{\sum n_i^*} \right)^{1/3}$	$x_{NV}^3 = \frac{\int_0^\infty x^3 n(x) dx}{\int_0^\infty n(x) dx} = \int_0^\infty x^3 f^N(x) dx$
Longitud, Superficie (Medio aritmético en longitud)	$x_{LS} = \frac{\sum L_i^* x_i}{\sum L_i^*} = \frac{\sum n_i^* x_i^2}{\sum n_i^* x_i}$	$x_{LS} = \frac{\int_0^\infty x^2 n(x) dx}{\int_0^\infty x n(x) dx}$
Longitud, Volumen	$x_{LV} = \left(\frac{\sum n_i^* x_i^3}{\sum n_i^* x_i} \right)^{1/2}$	$x_{LV}^2 = \frac{\int_0^\infty x^3 n(x) dx}{\int_0^\infty x n(x) dx}$
Superficie, Volumen (Medio aritmético en superficie - Sauter)	$x_{SV} = \frac{\sum s_i^* x_i}{\sum s_i^*} = \frac{\sum n_i^* x_i^3}{\sum n_i^* x_i^2}$	$x_{SV} = \frac{\int_0^\infty x^3 n(x) dx}{\int_0^\infty x^2 n(x) dx}$
Medio aritmético en volumen o masa	$x_{VM} = \frac{\sum v_i^* x_i}{\sum v_i^*} = \frac{\sum x_i^3 n_i^* x_i}{\sum x_i^3 n_i^*} = \frac{\sum n_i^* x_i^4}{\sum n_i^* x_i^3}$	$x_{VM} = \frac{\int_0^\infty x^4 n(x) dx}{\int_0^\infty x^3 n(x) dx}$

Para el ejemplo de la Tabla 3.11, el diámetro promedio en masa o volumen es de 40 μm, el que mantiene superficie y volumen 66 μm, y el diámetro de peso medio (o aritmético en volumen) 94 μm. Algunos tamaños medios para este ejemplo han sido presentados en la Figura 3.18.

El tamaño x_{VM} puede calcularse si el equipo mide distribuciones de tamaño expresadas en masa, ya que para el cálculo no se requiere el número de partículas, por esta razón muchas veces este diámetro es utilizado.

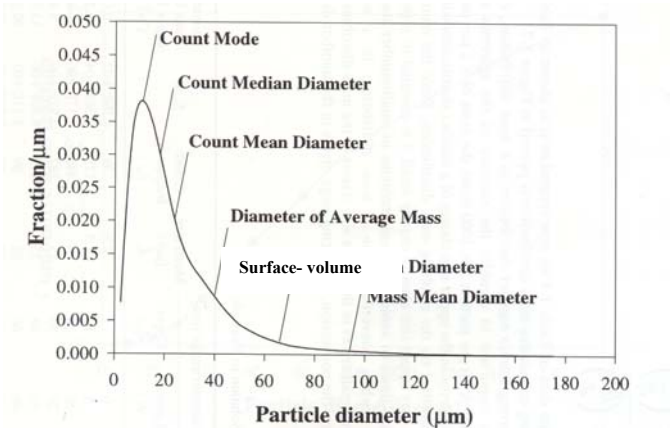


Figura 3.18. Tamaños medios para el ej. de Tabla 3.11. Fuente: Seville et al., 1997.

3.4.5. Tamaño medio geométrico

El tamaño promedio geométrico (base número) de una distribución (x_g) es la raíz enésima ($n=N_T$) del producto de los tamaños elevados al número de partículas que poseen dichos tamaño.

$$x_g = \left(\prod x_i^{n_i^*} \right)^{1/N_T} \tag{3.20}$$

Si aplicamos logaritmos a ambos miembros, resulta:

$$\ln x_g = \sum \frac{n_i^* \ln x_i}{N_T} \tag{3.21}$$

3.4.6. Tamaño medio armónico

La media armónica, en base número, se define como sigue:

$$x_H = \frac{\sum n_i^*}{\sum \frac{n_i^*}{x_i}} \tag{3.22}$$

La media armónica en base masa o volumen está relacionada con el área específica (se mantiene la relación S/V).

3.4.7. Observaciones respecto al uso de diámetros promedios

Si medimos nuestras partículas con microscopia electrónica, es posible medir los diámetros de las partículas y si dividimos la suma por el número de partículas, esta técnica nos proveerá el tamaño medio x_{NL}. Las técnicas de análisis de imágenes nos permiten obtener el área de las partículas, con esta información es muy fácil calcular el tamaño medio x_{NS}. El método de difracción láser permite el cálculo del tamaño medio en volumen (o masa si la densidad es constante) x_{VM}.

Supongamos que para nuestra aplicación queremos conocer el tamaño medio en volumen o masa, y hemos analizado la muestra mediante microscopia. En este caso tendríamos que convertir nuestra media en número a una media en masa. Matemáticamente esto es factible, pero debemos examinar las consecuencias de éste tipo de conversión. Imaginemos que nuestra técnica de medida electrónica está sujeta a un error de +/- 3% sobre el tamaño medio aritmético en número. Cuando convertimos el tamaño medio en número, a tamaño medio en masa, como la media en masa es una función cúbica del diámetro, el error estará elevado al cubo. Es decir, será del +/- 27% de variación del resultado final. Veamos la siguiente ecuación para entender mejor el problema, asumiendo que las partículas son esféricas y que el diámetro promedio de ellas es $\overline{dp}$, resulta que el volumen promedio es:

$$\rho \frac{\pi}{6} \overline{dp}^3 = \overline{V} \tag{3.23}$$

Sin embargo, si calculamos la distribución de volumen o masa a través de la técnica de difracción láser, la situación es diferente. Con esta técnica se podría conseguir generar una reproducibilidad de la media en volumen del +/- 0.5%. Si ahora convertimos esta media en volumen en media en número, el error sería la raíz cúbica de 0.5%.

3.5. Modelos matemáticos para representar distribuciones

El tamaño de partículas tiende a seguir distribuciones matemáticas bien definidas. Esto es conveniente ya que es mucho más fácil manejar una descripción que pueda ser descripta por una ley matemática. Los datos experimentales de sistemas particulados tienden a seguir una distribución de frecuencia gaussiana. Sin embargo, la ley log-normal se verifica con mayor frecuencia. Las desventajas del uso de estas leyes es que no pueden ser limitadas por tamaños máximos o mínimos, lo cual hace que las colas de las distribuciones sean mal predichas por estas funciones matemáticas.

3.5.1. Distribución normal aritmética

La ecuación de distribución de frecuencia gaussiana (o normal aritmética) posee la conocida forma de campana y se define como sigue:

$$y = \frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.24}$$

donde ϕ representa un término general para la frecuencia normalizada acumulativa, (puede ser número, longitud, superficie, volumen/masa acumulativos); σ es la desviación estándar y $\bar{x}$ es el tamaño medio. Si escribimos la ecuación (3.24) como una distribución de frecuencia en número normalizada resulta:

$$y = f^N = \frac{dF^N}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3.25}$$

donde,

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i^* x_i}{\sum n_i^*} \tag{3.26}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i^* (x_i - \bar{x})^2}{\sum n_i^*}} \tag{3.27}$$

Para obtener la curva acumulativa en número se necesita integrar la ecuación (3.25), consideremos para ello los siguientes cambios de variables:

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} \tag{3.28}$$

$$\sigma\, dt = dx \tag{3.29}$$

Reemplazando las ecuaciones (3.28) y (3.29) en (3.25) resulta:

$$\sigma f^N = \frac{dF^N}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \tag{3.30}$$

La función densidad normal (dada por la ecuación 3.30) se grafica en la Figura 3.19, donde puede observarse la típica forma de campana.

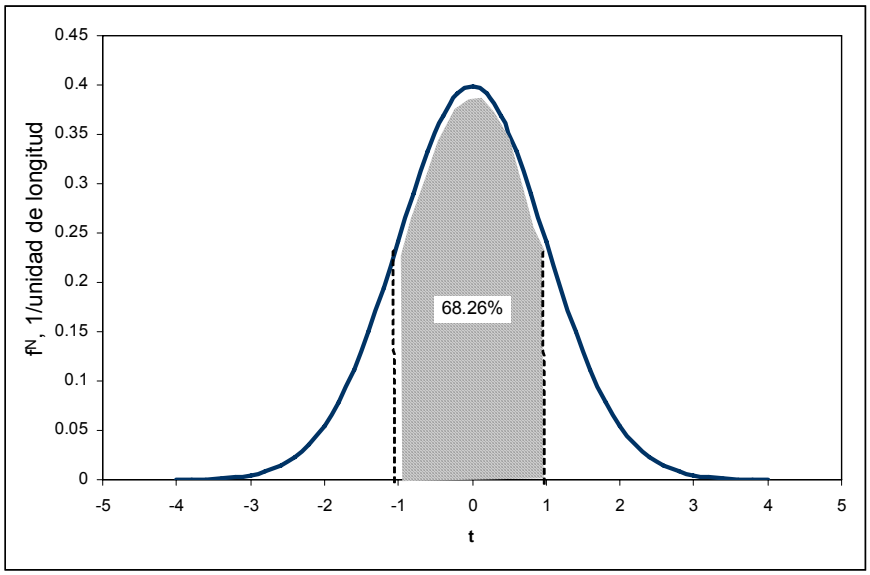


Figura 3.19. Curva de probabilidad normal.

Si se quiere conocer la curva acumulativa pasante en número, se debe integrar la ecuación 3.30:

$$\int_0^{F^N} dF^N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt \tag{3.31}$$

La solución de la ecuación (3.31) se presenta de manera tabular en la Tabla 3.13, y en forma gráfica en la Figura 3.20.

Tabla 3.13. Solución tabular de la ecuación (3.31) de probabilidad normal.

t	**F^N** Integral de la ecuación (3.32)
0	0.5000
0.5	0.6915
1.0	0.8413
1.5	0.9332
2.0	0.9987

3.0	0.9997

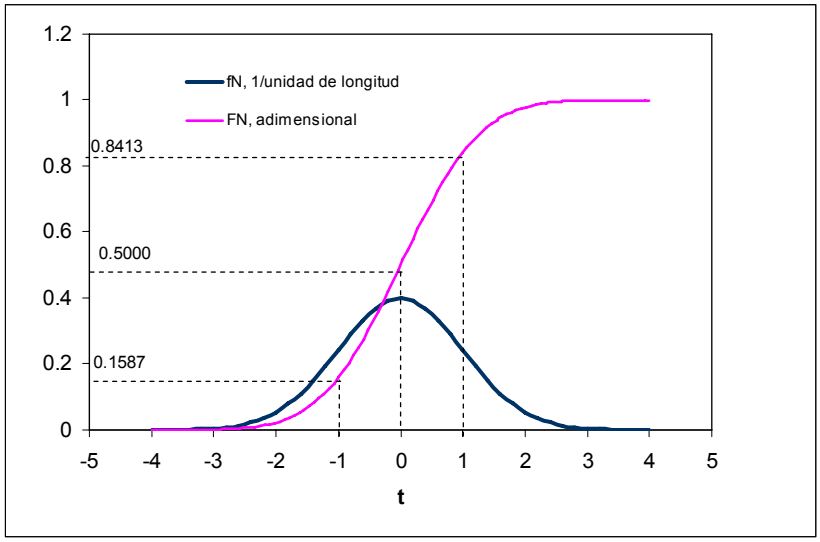


Figura 3.20. f^N y F^N en función de la variable t.

La fracción de área debajo de la curva entre el tamaño medio (t=0) y una desviación estándar de la media (t=1; $x = \bar{x} + \sigma$), según la Tabla 3.13, es igual a 0.8413 - 0.5000=0.3413. Por lo tanto el 68.26% de la distribución cae dentro de $x = \bar{x} \pm \sigma$. Este valor también puede calcularse fácilmente de la Figura 3.20. Del mismo modo, la fracción de área debajo de la curva entre el tamaño medio (t=0) y dos desviaciones estándares de la media (t=2; $x = (\bar{x} + 2\sigma)$), según la Tabla 3.13, es igual a 0.9987- 0.5000= 0.4987. Entonces el 99.74% de la distribución cae dentro de $x = \bar{x} \pm 2\sigma$.

Si queremos calcular la desviación estándar y conocemos el tamaño medio, podemos hacerlo del siguiente modo: $\sigma = x_{84.13\%} - \bar{x}$; siendo en este caso $x_{0.8413}$ el valor de tamaño donde se verifica que F^N alcanza el valor de 84.13% (ver Figura 3.20).

La Figura 3.22 muestra las curvas campanas para distintas poblaciones que comparten la misma media aritmética y diferentes desviaciones estándares.

Una propiedad fundamental de la distribución normal es que existe igual probabilidad de hallar partícula a ambos lados del valor medio. Por lo tanto cuando

una distribución normal se grafica en ejes de probabilidad, todos los valores deben caer en una línea recta, tal como puede observarse en la Figura 3.23.

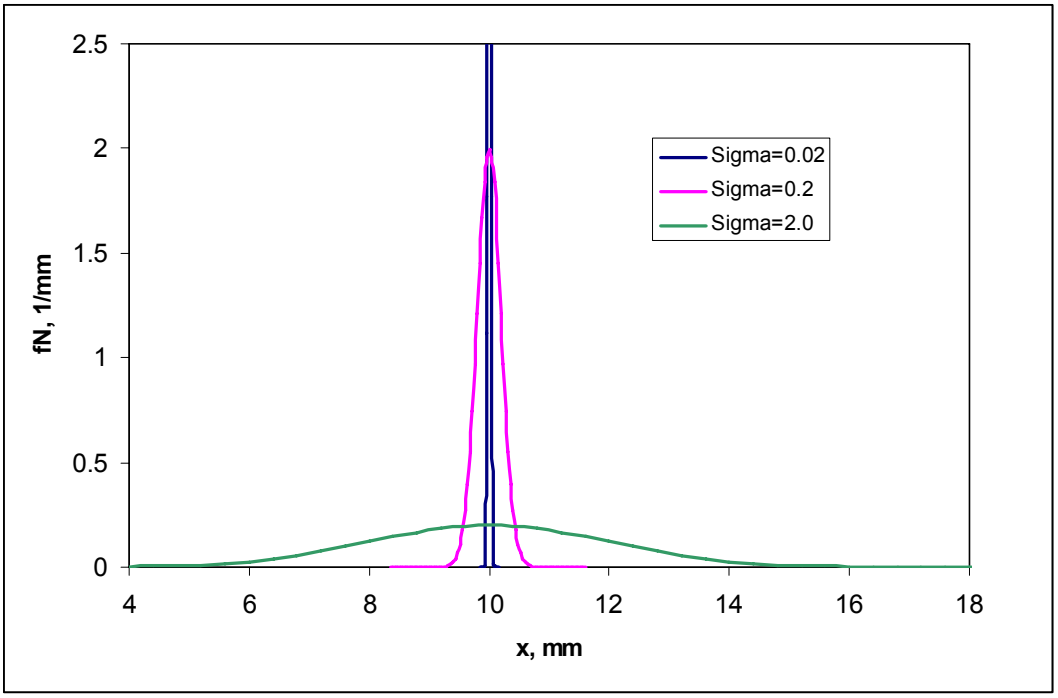


Figura 3.22. f^N en función del tamaño para distintas desviaciones. Tamaño medio aritmético en número=10mm.

La Figura 3.23 indica que cuanto más angosta sea la distribución se tenderá a obtener una recta vertical en gráficos F^N (coordenada y) vs x (coordenada x).

La distribución gaussiana no es muy común en los sistemas particulados, generalmente se verifica cuando las distribuciones son muy angostas. Las distribuciones más comunes están sesgadas hacia los diámetros mayores, por lo tanto las poblaciones se adecuan mejor a las distribuciones log-normales; las cuales veremos a continuación.

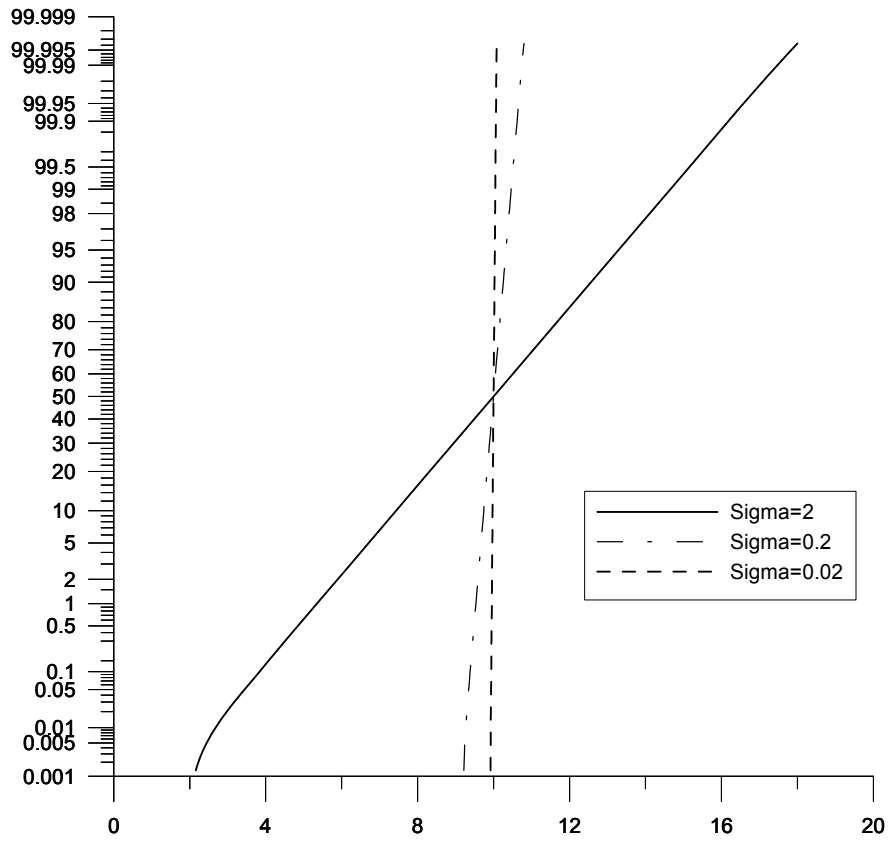


Figura 3.23. F^N (en escala de probabilidad normal porcentual) vs tamaño (en escala lineal).

3.5.2. Distribución log-normal

Para que la función log-normal luzca con forma de campana es necesario utilizar como eje x una progresión geométrica, que la cumple la escala logarítmica. Para obtener la función log-normal hay que reemplazar x en la ecuación (3.25) por z=lnx:

$$y = \frac{d\phi}{dz} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right] \tag{3.32}$$

En otros términos, la ley log-normal para la distribución en número puede expresarse como:

$$f^{N^*} = \frac{dF^N}{dz} = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(z-\bar{z})^2}{2\sigma_z^2}\right] \tag{3.33}$$

donde σ_z es la desviación estándar en términos de la variable z. La ecuación (3.33) es totalmente análoga a la (3.25), de manera que con una reconversión de variables como:

$$t = \frac{z - \bar{z}}{\sigma_z} \tag{3.34}$$

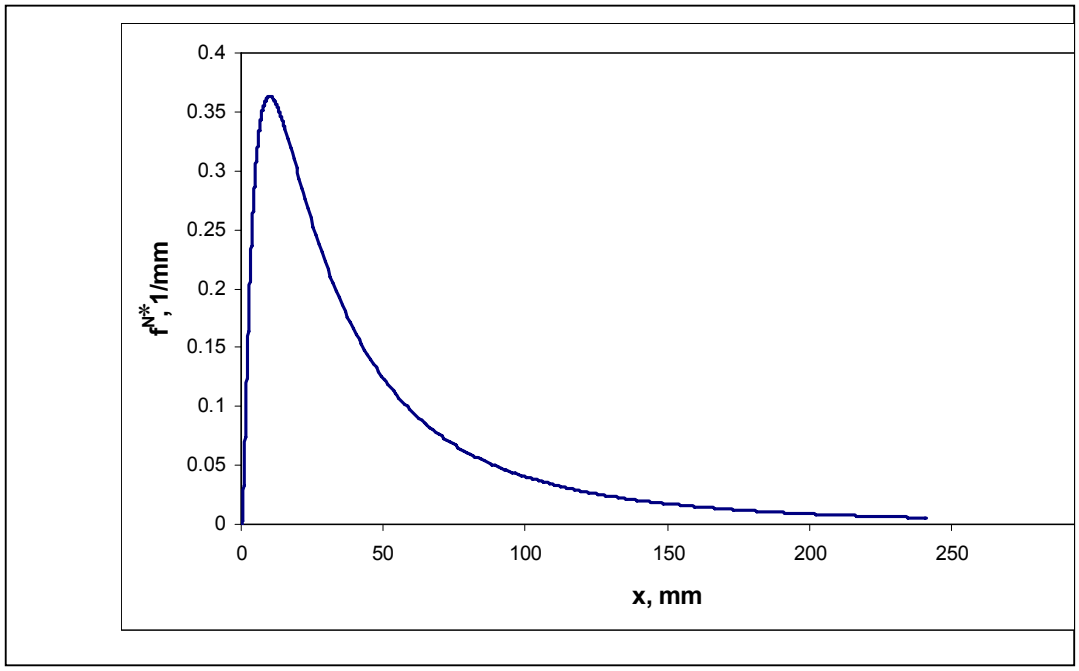
la curva campana de la Figura 3.19 representa adecuadamente a la distribución log-normal. La ecuación (3.33) puede expresarse como:

$$f^{N^*} = \frac{dF^N}{d\,ln\,x} = \frac{1}{ln\,\sigma_g\sqrt{2\pi}}\,exp\left[-\frac{\left(ln\,x - ln\,x_g\right)^2}{2\left(ln\,\sigma_g\right)^2}\right] \tag{3.35}$$

donde la media geométrica es:

$$\ln x_g = \sum \frac{n_i^* \ln x_i}{N_T} \tag{3.36}$$

La Figura 3.24 muestra la función densidad normalizada con el eje x expresado en escala aritmética. Como allí puede observarse la curva campana, usando escala aritmética, esta sesgada hacia la zona de mayores tamaños. Sin embargo, si se repite la figura (Figura 3.25) utilizando una escala logarítmica para el eje x, resulta que la



curva recupera su forma de campana original.

Figura 3.24. f^N (en escala lineal) vs tamaño (en escala lineal). X_g=10mm, σ_g= 3mm.

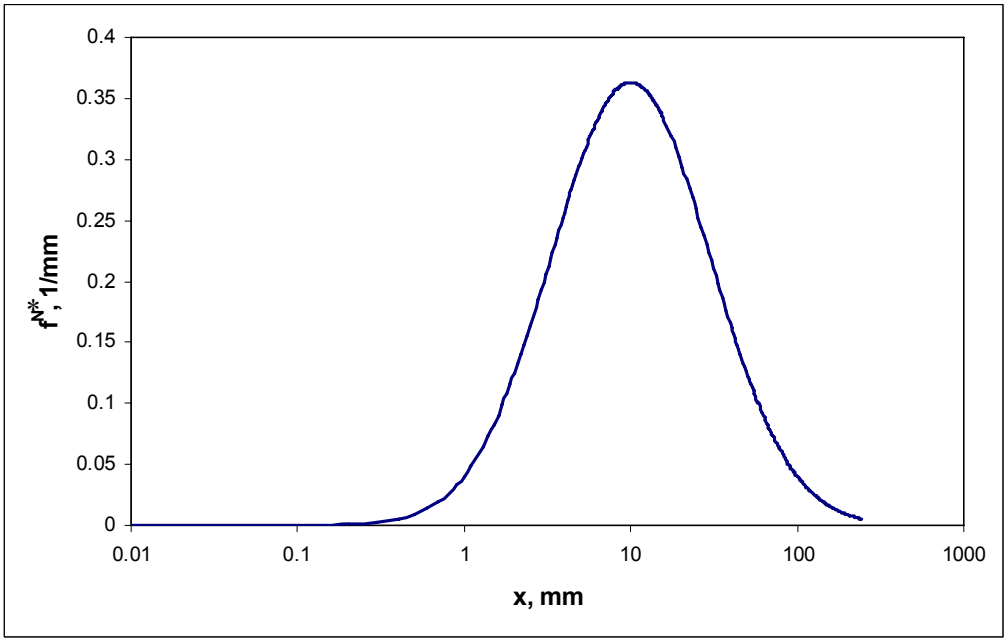


Figura 3.25. f^N (en escala lineal) vs tamaño (en escala logarítmica). X_g=10mm, σ_g= 3mm.

Si se grafica la curva acumulativa pasante normalizada en un eje de probabilidad normal versus el tamaño en escala logarítmica, se obtendrá una línea recta si la distribución satisface la curva log-normal, tal como puede observarse en la Figura 3.26.

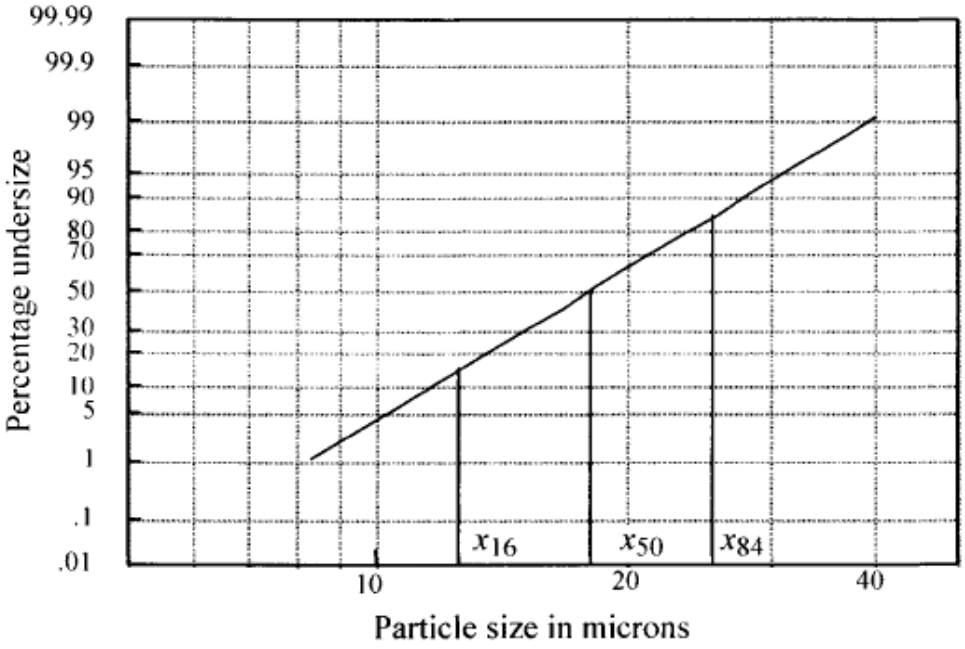


Figura 3.26. F^N (en escala de probabilidad normal porcentual) vs tamaño (en escala logarítmica). X_g=18 μm, σ_g= 1.4 μm. Fuente: Allen (2003).

Para las distribuciones log-normales, la moda, media y mediana geométricas coinciden.

La desviación estándar σ_g puede calcularse por diferencia de las variables z, o en términos de x, del siguiente modo (ver Figura 3.26):

$$\ln\sigma_g = \ln x_{50} - \ln x_{16}; \quad \sigma_g = x_g / x_{16} \tag{3.37}$$

o,

$$\ln\sigma_g = \ln x_{84} - \ln x_{50} = \ln(x_{84} / x_{50}) \quad \sigma_g = x_{84} / x_g \tag{3.38}$$

Si para las distintas distribuciones vistas determinamos el valor medio y la desviación correspondiente, es posible calcular la distribución continua.

3.6. Conversiones entre distribuciones

Como se discutió en la sección 3.4.7, en ciertas oportunidades se conoce la distribución de tamaño de partículas en número y por ejemplo se desea conocer la distribución en volumen (en dicha sección sólo vimos la conversión de medias). Es posible convertir distribuciones, sin embargo hay que realizar suposiciones, y ellas pueden introducir errores de importancia que se suman a los errores experimentales.

3.6.1. Conversión de $f^N(x)$ a $f^V(x)$

Tenemos en primer lugar que suponer una forma de partícula, por ejemplo si asumimos esfericidad, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$v_i^* = \frac{\pi}{6} x_i^3 \tag{3.39}$$

Recordemos que la función densidad no normalizada en volumen se definiría de manera análoga a lo que vimos para la función en número:

$$v_i = \frac{v_i^*}{\Delta x_i} \tag{3.40}$$

La pregunta es: si conocemos $f^N(x)$, cómo calculamos $f^V(x)$?. La función normalizada en volumen se puede calcular como sigue:

$$f_i^V = \frac{v_i}{V_T} = \frac{v_i^*}{\Delta x_i \; V_T} = \frac{\dfrac{\pi n_i^* x_i^3}{6}}{\Delta x_i \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\pi n_j^* x_j^3}{6}} \tag{3.41}$$

De la ecuación (3.2) sabemos que:

$$n_i^* = n_i \Delta x_i \tag{3.42}$$

Además de la ecuación (3.3) conocemos la siguiente relación:

$$n_i = f_i^N N_T \tag{3.43}$$

Combinando (3.42) y (3.43) resulta:

$$n_i^* = f_i^N N_T \Delta x_i \tag{3.44}$$

Reemplazando (3.44) en (3.41) se obtiene:

$$f_i^V = \frac{\dfrac{\pi f_i^N N_T \Delta x_i x_i^3}{6}}{\Delta x_i \sum\limits_{j=1}^{i} \dfrac{\pi f_j^N N_T \Delta x_j x_j^3}{6}} = \frac{f_i^N x_i^3}{\sum\limits_{j=1}^{i} f_j^N \Delta x_j x_j^3} \tag{3.45}$$

Los x_i de esta ecuación son los valores promedios (aritméticos) del intervalo de medida.

3.6.2. Conversión de $f^N(x)$ a $f^S(x)$

Tenemos en primer lugar que suponer una forma de partícula, por ejemplo si asumimos esfericidad, se satisfacen las siguientes relaciones:

$$s_i^* = \pi x_i^2 \tag{3.46}$$

La función densidad no normalizada en superficie sería:

$$s_i = \frac{s_i^*}{\Delta x_i} \tag{3.47}$$

La función normalizada en superficie se puede calcular como sigue:

$$f_i^S = \frac{s_i}{S_T} = \frac{s_i^*}{\Delta x_i \; S_T} = \frac{\pi n_i^* x_i^2}{\Delta x_i \sum\limits_{j=1}^{i} \pi n_j^* x_j^2} \tag{3.48}$$

Reemplazando la ecuación (3.44) en (3.48) resulta:

$$f_i^S = \frac{\pi f_i^N N_T \Delta x_i x_i^2}{\Delta x_i \sum_{j=1}^{i} \pi f_j^N N_T \Delta x_j x_j^2} = \frac{f_i^N x_i^2}{\sum_{j=1}^{i} f_j^N \Delta x_j x_j^2} \qquad (3.49)$$

Ejemplo:

Tabla 3.14. Conversión de funciones densidad

d inf, um	d sup, um	d prom, um	Número, #	ni, #/um	fiN, 1/um	fiV(numerador)	fiV(denominador)	fiV,1/um	fiS(numerador)	fiS(denominador)	fiS,1/um
0	5	2.5	39	7.8	0.0078	0.121875	0.609375	1.86983E-06	0.04875	0.24375	4.93016E-05
5	10	7.5	175	35	0.035	14.765625	73.828125	0.000226538	1.96875	9.84375	0.001991025
10	20	15	348	34.8	0.0348	117.45	1174.5	0.001801945	7.83	78.3	0.007918589
20	30	25	187	18.7	0.0187	292.1875	2921.875	0.004482809	11.6875	116.875	0.011819733
30	40	35	112	11.2	0.0112	480.2	4802	0.00736734	13.72	137.2	0.013875229
40	60	50	89	4.45	0.00445	556.25	11125	0.008534117	11.125	222.5	0.011250869
60	80	70	27	1.35	0.00135	463.05	9261	0.007104221	6.615	132.3	0.006689843
80	100	90	13	0.65	0.00065	473.85	9477	0.007269917	5.265	105.3	0.005324569
100	150	125	8	0.16	0.00016	312.5	15625	0.004794448	2.5	125	0.002528285
150	200	175	2	0.04	0.00004	214.375	10718.75	0.003288991	1.225	61.25	0.00123886
							65179.5625			988.8125	
			1000								

En la Tabla 3.14 se presenta un ejemplo para realizar conversiones entre funciones densidad. La Figura 3.27 compara las distintas distribuciones. Resulta claro que los tamaños medios serán mayores para las distribuciones en volumen respecto a las expresadas en superficie y en número.

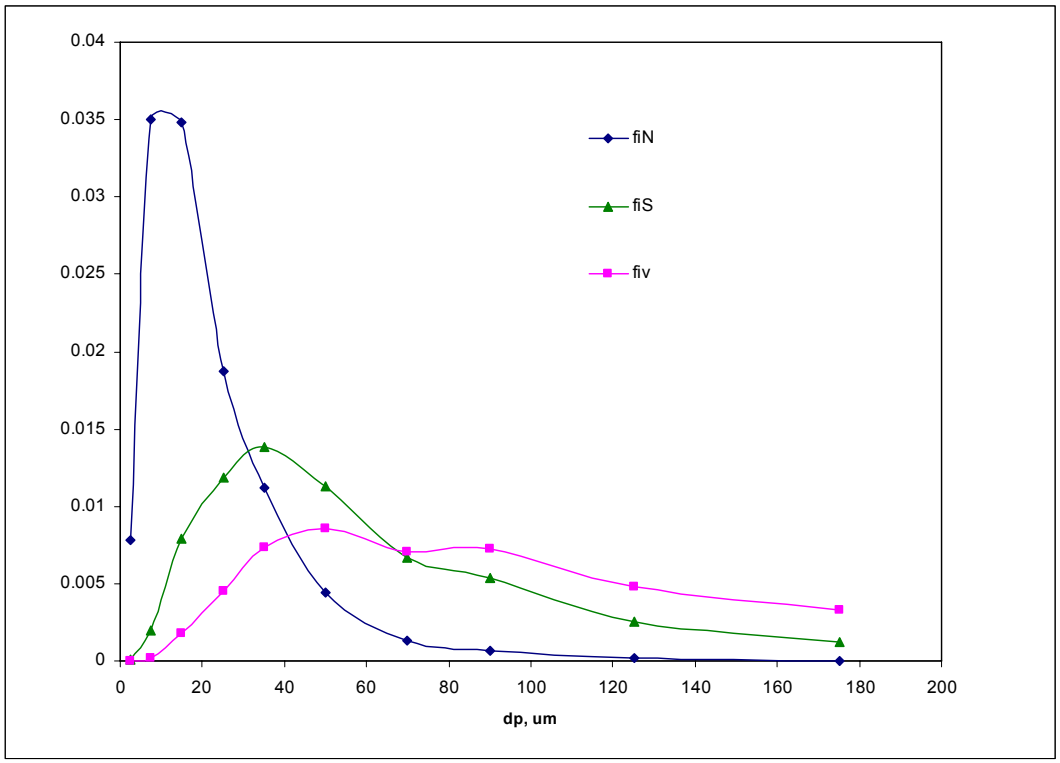


Figura 3.27. Conversiones entre distribuciones.